

1. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$

$= 4(3x + 1) + a$

$= 12x + 4 + a$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

$\therefore a = 3$

2. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

$$\text{마찬가지로 } (g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

3. 두 함수 $f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x + k, \quad g(x) = 2x + 4 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(2x + 4) = -3(2x + 4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \text{㉠} \\ (g \circ f)(x) &= g(-3x + k) = 2(-3x + k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠과 ㉡이 같아야 하므로} \\ -6x - 12 + k &= -6x + 2k + 4 \\ \therefore k &= -16 \end{aligned}$$

4. 함수 $f(x) = kx$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족시키는 양의 상수 k 의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(kx) = k(kx) = k^2x = x$ 에서
 $k^2 = 1 \quad \therefore k = 1 (\because k > 0)$

5. 세 함수 f, g, h 를 다음과 같이 정의할 때, 다음 중 합성함수가 정의되지 않는 것은?

$$\begin{aligned} f(x) &= x-1 && (1 \leq x \leq 3) \\ g(x) &= (x-1)^2 && (0 \leq x \leq 3) \\ h(x) &= x^3 && (0 \leq x \leq 4) \end{aligned}$$

- ① $g \circ f$

② $h \circ f$

③ $h \circ g$

④ $h \circ g \circ f$

⑤ $h \circ f \circ g$

해설

일반적으로 함수 f, g 에서 (f 의 치역) $\subset$ (g 의 정의역) 이면 합성함수 $g \circ f$ 를 정의할 수 있다.
 $f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$,
 $g(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq 4\}$,
 $h(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq 64\}$ 이므로
①, ②, ③, ④의 합성함수는 모두 정의된다.
⑤ $g(x)$ 의 치역이 $\{y \mid 0 \leq y \leq 4\}$ 이고
 $f(x)$ 의 정의역이 $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ 이므로 (g 의 치역) $\not\subset$ (f 의 정의역)
따라서 $f \circ g$ 가 정의되지 않으므로 $h \circ f \circ g$ 도 정의되지 않는다.

6. 함수 $f(x) = ax + b(a > 0)$ 에 대하여 합성함수 $(f \circ f)(x) = 4x + 3$ 일 때 $f(1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b\end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = 4x + 3$$

x 에 대한 항등식 이므로 $a^2 = 4, ab + b = 3$

$a > 0$ 이므로 $a = 2, b = 1$

$$\therefore f(x) = 2x + 1$$

$$\therefore f(1) = 3$$

7. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$ 에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때 $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은?

- ① -99 ② -98 ③ -97 ④ -96 ⑤ -95

해설

$$h(x) = f(1 - x) = 1 - \frac{1}{1 - x}$$
$$1 - \frac{1}{1 - x} = \frac{99}{100}, 1 - x = 100, x = -99$$

8. 세 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = -x + a$, $h(x) = bx + 2$ 가 $h \circ f = g$ 를 만족시킬 때, $a + b$ 의 값은 얼마인가?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x + 1) = b(x + 1) + 2 = bx + b + 2$$

$$g(x) = -x + a \text{ 이므로, } bx + b + 2 = -x + a$$

$$b = -1, b + 2 = a$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 0$$

9. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, $(f \circ f)(x)$ 의 값은 얼마인가?

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{가 유리수일 때}) \\ 3-x & (x \text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

- ① x ② $3-x$ ③ $x-3$ ④ 0 ⑤ 3

해설

- (i) x 가 유리수일 때, $f(x) = x$ 이므로,
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$
(ii) x 가 무리수일 때,
 $f(x) = 3-x$ 로 무리수이므로,
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 - f(x) = 3 - (3-x) = x$
(i), (ii) 에 의하여 $(f \circ f)(x) = x$

10. 함수 $f(x) = kx$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 모두 합하면 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(kx) = k^2x = x \text{ 이므로}$$

$$k^2 = 1$$

$$\therefore k = \pm 1$$

따라서 k 의 값의 합은 0

11. 두 함수 $f(x) = -x + 4$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(k) = 2$ 를 만족하는 상수 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x + 2) \\ &= -(3x + 2) + 4 = -3x + 2 \text{ 이므로} \\ (f \circ g)(k) &= 2 \text{에서 } -3k + 2 = 2 \\ \therefore k &= 0\end{aligned}$$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f(f(f(x))) = x$ 가 되는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여

$$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$$

$$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$$

$$f(f(f(x))) = x \text{ 이므로 } 8x - 21 = x$$

$$\therefore x = 3$$

13. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

14. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 X 로의 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) \begin{cases} x+1 & (x \leq 3) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$$

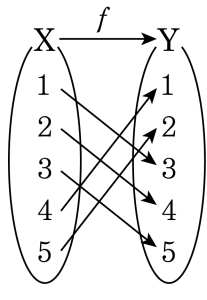
이 때, $g : X \rightarrow X$ 에 대하여 $g(1) = 3$ 이고 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $g(2) < g(3) < g(4)$ ② $g(2) < g(4) < g(3)$
③ $g(3) < g(2) < g(4)$ ④ $g(3) < g(4) < g(2)$
⑤ $g(4) < g(3) < g(2)$

해설

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$ 임을 이용하여
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$
 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) \quad (\therefore f \circ g = g \circ f)$
 $\therefore g(2) = 4$
 $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$
 $\therefore g(3) = 1$
 $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$
 $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$
 $\therefore g(4) = 2$
 $\therefore g(3) < g(4) < g(2)$

15. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 두 함수 $f : X \rightarrow X, g : X \rightarrow X$ 가 있다. 함수 f 가 다음 그림과 같이 정의되고 두 함수 f, g 가 $f \circ g = g \circ f$ 를 만족한다. $g(1) = 5$ 일 때, $g(3)$ 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f \circ g = g \circ f$ 이므로 문제의 조건에서 $g(1) = 5$ 이므로
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(5) = 2$
 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3)$
 $\therefore g(3) = 2$

16. 두 함수 $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $(g \circ f)(2) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} (g \circ f)(2) + (g \circ f)(3) &= g(f(2)) + g(f(3)) \\ &= g(-1) + g(4) \\ &= (-1)^2 + 2 \times 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

17. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

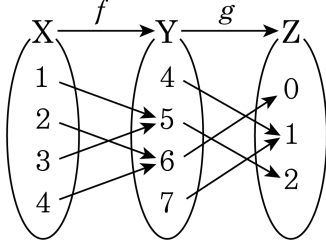
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1$ ($\because f(2) = 3$)
함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.
 $\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

18. 아래 그림과 같이 주어진 함수 f, g 에 대하여 $(g \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?



- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 2$

19. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

20. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

21. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f \circ g = g \circ f \text{에서 } -2x + 2k + 3 &= -2x - 3 + k \\ \therefore k &= -6 \end{aligned}$$

22. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } 2ax + 1 = 2ax + 3a - 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

23. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$ 에서
 $(x + a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,
 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$
즉 $2ax + a^2 - a = 0$
모든 실수 x 에 대해 성립하려면 $a = 0$

24. 두 함수 $f(x) = 4x^2 + 1$, $g(x) = 2x + 2$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x^2 - 2x + 3$

② $h(x) = x^2 - 2x + 5$

③ $h(x) = x^2 - 4x + 5$

④ $h(x) = x^2 - 4x + 3$

⑤ $h(x) = x^2 - 4x + 2$

해설

$$h \circ g = f \Rightarrow h = f \circ g^{-1}$$

먼저 $g^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = 2x + 2$$

$$\Rightarrow x = 2y + 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 \cdots g^{-1}(x)$$

$$\therefore h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$$

$$= f(g^{-1}(x))$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1$$

$$= x^2 - 4x + 5$$

$$\text{따라서 } h(x) = x^2 - 4x + 5$$

25. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$ 를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$$\frac{x+1}{5} = t \text{로 놓으면 } x = 5t - 1$$

$$f(t) = (5t - 1) + 2 = 5t + 1 \text{에서}$$

$$f(x) = 5x + 1$$

$$\therefore f(f(x)) = f(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1$$

$$= 25x + 6$$

$$\therefore f(f(10)) = 25 \cdot 10 + 6 = 256$$

26. $f(x) = 2x + 3$ 일 때, $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킨다고 한다.
이 때, $g(1)$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \text{ 이므로 } (g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = \frac{1}{2}x$$

$$\text{여기서 } 2x + 3 = t \text{ 라 하면 } x = \frac{t - 3}{2}$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t - 3}{2}$$

$$\therefore g(1) = -\frac{1}{2}$$

27. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x)) = x$ 가 되는 함수 $g(x)$ 는?

- ① $1-x$ ② $\frac{1}{1-x}$ ③ $\frac{x}{x-1}$ ④ $\frac{x-1}{x}$ ⑤ $\frac{x-1}{x+1}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ 일 때}$$

$$g(f(x)) = x \text{ 에서 } f(x) = t \text{ 로 놓으면}$$

$$\frac{1}{1-x} = t \text{ 에서 } (1-x)t = 1, t - xt = 1$$

$$xt = t - 1, x = \frac{t-1}{t} \text{ 이므로 } g(t) = \frac{t-1}{t}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x-1}{x}$$

28. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

29. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x-2}{x+2}$ 를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 0 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 5

해설

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x-2}{x+2} \text{ 에서}$$

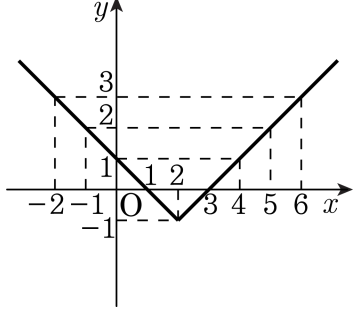
$f(2)$ 를 구해야 하므로

$$\frac{x+1}{x-1} = 2 \text{ 인 } x \text{를 구하여 대입한다.}$$

$$\text{즉, } x+1 = 2x-2 \text{ 에서 } x = 3$$

$$\therefore f(2) = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$$

30. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
 $f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
 $X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
 $X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

31. 두 함수 $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -2x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 에서
 $-6x + 3k + 2 = -6x - 4 + k$
 $2k = -6$ 에서 $k = -3$

32. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x + 3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

- ① $k(x) = -x + 1$ ② $k(x) = -x + 2$ ③ $k(x) = -x + 3$
④ $k(x) = -x + 4$ ⑤ $k(x) = -x + 5$

해설

$k \circ g = h$ 이므로 $(k \circ g) \circ f = h \circ f$
 $k \circ (g \circ f) = h \circ f$
 $k \circ I = h \circ f (\because g \circ f = I, I \text{는 항등함수})$
 $\therefore k = h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k)$
 $\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x + 3$

33. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $h(x) = x + 4$ ② $h(x) = 2x - 5$ ③ $h(x) = 3x + 2$
④ $h(x) = 3x + 5$ ⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면
 $h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$
 $\therefore 2a = 4, a + b = -3$
이것을 풀면 $a = 2, b = -5$
따라서 $h(x) = 2x - 5$

34. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

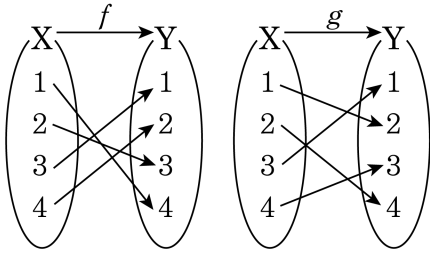
$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax + 4b + 1) + 3 \\ &= -8ax - 8b - 2 + 3 \\ &= 4x + 1\end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

35. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
 역함수가 존재한다.
 $\therefore g \cdot f^{-1}$
 $= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$
 $= h \cdot I = h$
 $\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$
 $= g(f^{-1}(2))$
 $= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$
 $\therefore g(4) = 3$

36. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$

한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면

$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$

$\therefore h(1) = -2$

37. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5
- ② 3
- ③ 1
- ④ -3
- ⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4, 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

38. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x - 1$$

$$\therefore h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

해설

$f(h(2)) = g(2)$ 에서, $h(2) = a$ 라 두면, $g(2) = 3$ 이므로

$$f(a) = 3, \frac{a-1}{a+2} = 3$$

$$\text{이를 풀면 } \therefore a = h(2) = -\frac{7}{2}$$

39. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1) + 2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1) + 3 = x+4 \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$f^n(x) = x + n$$

$$\therefore f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$$

40. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \dots, f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

41. 함수 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 에 대하여 $f^{101}(-1)$ 의 값은? (단, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$)

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f^2(-1) = 2, \quad f^3(-1) = -1, \quad f^4(-1) = \frac{1}{2} \quad \dots$$

주기가 3 으로 반복되므로

$$f^{101} = (f^3)^{33} \circ f^2 = f^2 = 2$$

42. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
 $= f((x+1)+1) = f(x+2)$
 $= (x+2)+1 = x+3$
 $\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
 $= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
 $= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

43. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

- ① 60
- ② 55
- ③ 51
- ④ 48
- ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ 이므로

$$2a = 2a^2, 3a = 4ab + 3a, a + b = 2b^2 + 3b + 1$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 0 (\because a \neq 0)$

즉, $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 \end{aligned}$$

44. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5$ 일 때,
 $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$

② $2x-2$

③ $4x-2$

④ $6x-3$

⑤ $8x-3$

해설

$$\frac{3x+1}{2} = t \text{ 라 하면 } 2t = 3x+1$$

$$\therefore x = \frac{2t-1}{3}$$

$$f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5 \text{ 에서}$$

$$f(t) = 6 \cdot \frac{2t-1}{3} - 5 = 4t-7$$

$$\therefore f(2x+1) = 4(2x+1) - 7 = 8x-3$$

45. 함수 $f(x) = -x + 3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\dots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(2) + f^{(4)}(2) + \dots + f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3006

해설

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 3) = x$$

$$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x))$$

$$= f(x) \text{ 이므로}$$

$$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f^{(2)}(1) = 3, \dots$$

$$f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002) = 3 \text{ 이다.}$$

$$3 \text{ 이 } 1002 \text{ 개이므로 } 3 \times 1002 = 3006$$

46. 실수에서 정의된 함수 $f_1(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ (단, n 은 자연수)에 대하여, 방정식 $f_{2008}(x) = \frac{1}{2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f_2(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1}$$
$$f_3(x) = \frac{\frac{-1}{x-1} - 1}{\frac{-1}{x-1}} = x$$
$$f_4(x) = f_1(x)$$
$$\vdots$$

$2008 = 3 \times 669 + 1$ 이므로

$$\therefore f_{2008}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$
$$\therefore x = 2$$

47. 함수 $f(x) = x+2$ 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f \circ f^2 = f^3, \dots, f \circ f^{99} = f^{100}$ 으로 정의할 때, $f^{100}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$$f(x) = x + 2$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f(x+2) = (x+2) + 2 \\ &= x + 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(x+2 \cdot 2) = (x+2 \cdot 2) + 2 \\ &= x + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f^{100}(x) = x + 2 \cdot 100$$

$$\therefore f^{100}(1) = 1 + 2 \cdot 100 = 201$$

48. 함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\frac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

- ① $\frac{80}{399}$ ② $\frac{82}{399}$ ③ $\frac{83}{399}$ ④ $\frac{85}{399}$ ⑤ $\frac{86}{399}$

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{2x+1} \\ f^3(x) &= f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{3x+1} \\ f^4(x) &= f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{4x+1} \end{aligned}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \frac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1} + 1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x} \\ &= \frac{x}{nx+1} \end{aligned}$$

$$\therefore f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9 \cdot 2 + 1} + \frac{2}{10 \cdot 2 + 1} = \frac{80}{399}$$

49. 함수 $f(x) = 2x+5$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, f^3 = f^2 \circ f, \dots, f^{n+1} = f^n \circ f$ 라 정의하자. 이 때, $f^n(x)$ 를 추정하고 $1+2+2^2+2^3+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$ 임을 이용하여 $f^7(5)$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 1275

해설

$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x+5) = 2(2x+5)+5 = 2^2x+2 \cdot 5+5$
 $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(2^2x+2 \cdot 5+5) = 2(2^2x+2 \cdot 5+5)+5$
 $= 2^3x+2^2 \cdot 5+2 \cdot 5+5$
이와 같이 계속하면 다음과 같이 추정할 수 있다.
 $f^n(x) = 2^n x + 2^{n-1} \cdot 5 + 2^{n-2} \cdot 5 + \dots + 2 \cdot 5 + 5 = 2^n x + (5 \cdot 2^n - 1)$
 $\therefore f^7(5) = 5(2^7 + 2^6 + \dots + 2 + 1) = 5(2^8 - 1) = 1275$

50. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases} \quad \text{로 정의한다.}$$

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.
(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$))

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,
1은 4로 대응시킴을 의미한다.
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면
4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.
 $\therefore f^4(x) = x$
 $\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \dots = f^4(x) = x$
 $\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$

