1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$ 에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \ge 0$ 이어야 하므로

$k^2 + 8k \ge 0,\ k(k+8) \ge 0$

$\therefore k \le -8$ 또는 $k \ge 0$

따라서 위의 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$　② $m < 1, m > 5$　③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$　⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

4. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면

$4-x=-x^2+kx \quad \Rightarrow \quad x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$ 이어야 한다.

$D=(k+1)^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad k+1=\pm 4$

$\therefore k=3 \ (\because k>0)$

5. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$이 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < a < -1$ ② $-3 < a < 9$ ③ $-1 < a < 4$

④ $2 < a < 6$ ⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,

즉 $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로

$D = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$

$a^2 - 6a - 27 < 0$

$(a+3)(a-9) < 0$

$\therefore -3 < a < 9$

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2\ \therefore\ a + b = 14$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$　　② $1 < k < 3$

③ $k < 3$　　④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

8. 다음 식은 평면 위에 있는 어떤 그래프의 방정식이다. 이 그래프가 x 축에 접하도록 실수 a, b 의 값에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

$$y+(x+y)x+(a-1)x-b^2=0$$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

접점의 x 좌표는 $y=0$ 일 때, 얻어지는 방정식
$x^2+(a-1)x-b^2=0$ 의 중근이다.
$\therefore\ D=(a-1)^2+4b^2=0$
a, b 는 실수이므로 $a=1$, $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

9. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = 2a \quad \cdots$ ㉠

이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로

$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면

$(\beta - \alpha)^2 = 4$

$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

10. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

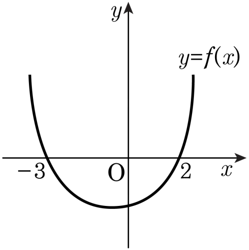
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

11. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

12. 직선 $y = x + 4$에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$ ② $4x - 4y = 9$ ③ $-4x + 4y = 9$

④ $-4x - 4y = 5$ ⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$라 하면

이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,

즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$D = 1 - 4k + 8 = 0$

$\therefore k = \dfrac{9}{4}$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \dfrac{9}{4}$

$\therefore -4x + 4y = 9$

13. 직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

이차방정식 $2x + a = x^2 - 1$, 즉 $x^2 - 2x - a - 1 = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + a + 1 = 0$$

$\therefore a = -2$

14. 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 의 두 교점의 좌표를 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 라 할 때, $y_1 y_2$ 의 값은?

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

해설

두 교점의 x 좌표 x_1, x_2 는
방정식 $x^2 + 3x + 1 = -x + 3$ 의 실근이다.
$x^2 + 4x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
$x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -2$

$$\begin{aligned} \therefore\ y_1 y_2 &= (-x_1 + 3)(-x_2 + 3) \\ &= x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 \\ &= -2 + 12 + 9 = 19 \end{aligned}$$

15. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x + 1$의 그래프와 직선 $y = ax + b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81　② -45　③ 0　④ 5　⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = ax + b$, 즉 $2x^2 - (3+a)x + 1 - b = 0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + 5 = \frac{3+a}{2},\ 1 \times 5 = \frac{1-b}{2}$$

$\therefore a = 9,\ b = -9$

$\therefore ab = -81$

16. 이차함수$y=ax^2-5x-2$ 의 그래프와 직선 $y=bx+a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0,-3$ 일 때, 상수 a,b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

이차함수 $y=ax^2-5x-2$ 의 그래프와
직선 $y=bx+a$ 의 교점의 x 좌표 $0,-3$ 은
이차방정식 $ax^2-(b+5)x-a-2=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여

$$(\text{두근의합})=0+(-3)=\frac{b+5}{a}$$

$\therefore\ 3a+b=-5\cdots$ ㉠

$$(\text{두 근의 곱})=0\cdot(-3)=\frac{-a-2}{a}$$

$\therefore a=-2$

㉠에서 $b=1$ 이므로 $a+b=-1$

17. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

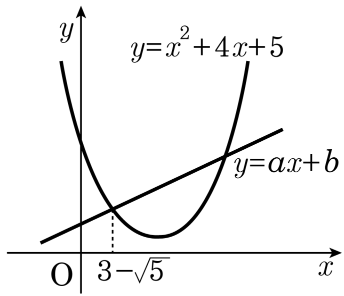
① 5　② $5\sqrt{2}$　③ 7　④ $7\sqrt{2}$　⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

18. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서

y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$

$x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots$ ㉠

이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이

$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.

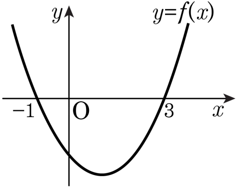
$\therefore\ (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$

$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$

$\therefore\ a = 2,\ b = 1$

$\therefore a + b = 3$

19. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$의 두 근의 합은?



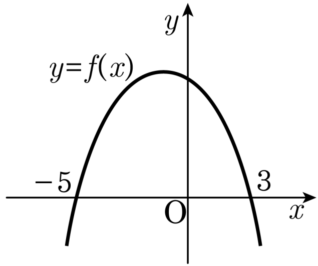
① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로
$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$이므로
$f(2x-1) = 0$에서
$4ax(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 합은 2이다.

20. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

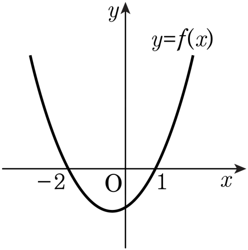
$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)\text{이므로}$$

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$의 두 근의 합은 4

21. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y=f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y=f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$
$\therefore a=-3$

22. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

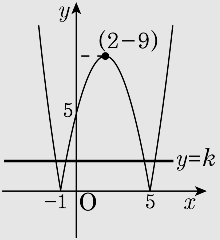
① $0<k<3$ ② $0<k<5$ ③ $3<k<5$

④ $1<k<4$ ⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



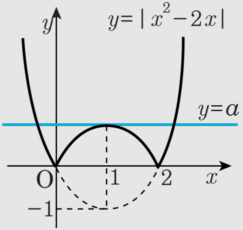
따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

23. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.



이때, 직선 $y = a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의
꼭지점을 지나야 한다.

$y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ 에서
꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$

$\therefore\ a = 1$