

1. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?
- ① 6 km ② 9 km ③ 12 km
- ④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A 마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X 라 하면

A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
 $|x - 0| = 2|x - 9|$
곧, $|x| = 2|x - 9|$
 $\therefore 2(x - 9) = \pm x$
 $\therefore x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$ 이면 $X = B$ 가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12(\text{km})$

2. 세 점 A(2, 1), B(4, 3), C(a, 0)에 대하여 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-2)^2 + 1^2}, \overline{BC} = \sqrt{(a-4)^2 + 3^2}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(a-2)^2 + 1 = (a-4)^2 + 9$$

$$4a = 20$$

$$\therefore a = 5$$

3. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대한 설명이다.

1. 점 A와 점 B는 x 축 위에 있다.

2. 점 B의 x 좌표는 점 A의 좌표보다 크다.

3. $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

4. $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$

점 A, B, C, D의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $a < b < c < d$

② $a < c < b < d$

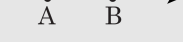
③ $a < c < d < b$

④ $c < a < b < d$

⑤ $c < a < d < b$

해설

1, 2에 의하여 A, B의 위치는 그림과 같다.



3에서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다. 4에서 $\triangle BCD$ 는 정삼각형이다. x 축의 아랫부분에 점 C, D를 잡아도 같은 결과를 얻는다.

$\therefore a < c < b < d$

4. 두 점 A(-1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P와 y 축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

- ① P(2.4, -1), Q(0, 6) ② P(3.6, 0), Q(-1, 6)
③ P(3.6, 0), Q(0, 6) ④ P(2.4, 0), Q(0, 5)
⑤ P(3.6, 0), Q(-1, 2)

해설

A(-1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P(x , 0) 과 Q(0, y)
를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \therefore P(3.6, 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore Q(0, 6)$

5. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$ 로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$

③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$ 로 놓으면

$$\sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2}$$

$$= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2}$$

$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4$$

$$10a + 10 = -14a + 13$$

$$\therefore 24a = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}, 2a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

6. 두 점 A(2, -1), B(6, 3) 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, △OPQ의 외심의 좌표를 (x, y)라 할 때, x + y의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P(a, 0), Q(0, b)라 하면

$$(2-a)^2 + (-1-0)^2 = (6-a)^2 + (3-0)^2 \cdots \textcircled{A}$$

$$(2-0)^2 + (-1-b)^2 = (6-0)^2 + (3-b)^2 \cdots \textcircled{B}$$

①에서 $a = 5$, ②에서 $b = 5$

△OPQ의 외심을 (x, y)라 하면

$$x^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 = x^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore -10x + 25 = 0, -10y + 25 = 0$$

$$\therefore x = y = \frac{5}{2}$$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\therefore x + y = 5$$

7. 좌표평면 위에 두 점 $A(a, b)$, $B(-2, 2)$ 가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$ 의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원점을 $O(0, 0)$ 이라 하면

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$$

$= \overline{OA} + \overline{AB}$ 이므로

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O , A , B 가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최소값은

$$\overline{OB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

8. 두 점 $A(2, 5)$, $B(7, -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점 P 가 제 1 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $0 < t < \frac{1}{3}$

② $0 < t < \frac{3}{5}$

③ $0 < t < \frac{5}{6}$

④ $\frac{3}{5} < t < 1$

⑤ $\frac{3}{5} < t < \frac{5}{6}$

해설

점 P 가 $\overline{AB}$ 를 $t : (1-t)$ 로 내분하므로

$$P\left(\frac{7t + (1-t) \cdot 2}{t + (1-t)}, \frac{-t + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)}\right)$$

$$\therefore P(5t + 2, -6t + 5)$$

점 P 가 제1 사분면에 있으므로 $5t + 2 > 0$ 이고 $-6t + 5 > 0$

$$\therefore -\frac{2}{5} < t < \frac{5}{6}$$

이때, $0 < t < 1$ 이므로 구하는 t 의 값의 범위는

$$\therefore 0 < t < \frac{5}{6}$$

9. 네 점 A(1, 4), B(-2, -3), C(x, y), D(6, 7)를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

- ① C(-1, 2) ② C(3, 0) ③ C(3, 4)
④ C(1, -1) ⑤ C(0, 0)

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2}, \frac{7-3}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2, 2) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$$

$$\therefore x = 3, y = 0$$

$$\therefore C(3, 0)$$

10. $\triangle ABC$ 의 세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 $(1, 5), (-2, 1), (9, -1)$ 이라 하자. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점 D 의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3(a-b)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

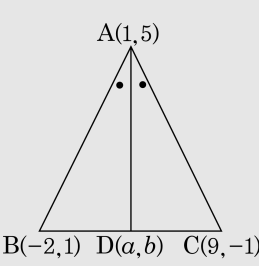
$\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 2$$

따라서 D 는 $\overline{BC}$ 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점

$$\therefore D\left(\frac{9-4}{3}, \frac{-1+2}{3}\right) = D\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore 3(a-b) = 3\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right) = 4$$



11. 두 점 A(1, 2), B(-3, 0) 으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x - 1$

③ $y = -2x + 1$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 P(x,y) 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

해설

두 점 으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점(-1, 1) 을 지난다.

$$\therefore y - 1 = -2(x + 1)$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

12. 세 점 $A(-1, -4)$, $B(3, -3)$, $C(7, 1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x, y)$ 라고 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\}$$

$$+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\}$$

$$+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\}$$

$$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9$$

$$+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85$$

$$= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46$$

$$= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46$$

따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

13. 세 도시 A, B, C가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?
- ① 외심 ② 내심 ③ 수심
- ④ 무게중심 ⑤ 방심

해설

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$
송전소의 위치를 $D(x, y)$, 비용을 P 라고 하면
$$P = k\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2\}$$
$$= k\left\{3\left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2 - \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} - \frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2}{3} + k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\right\}$$
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ 일 때}$$

즉 $\triangle ABC$ 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

14. 두 점 A(3, 2), B(a, b) 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고,}$$

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

$$\therefore a+2b-1=0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 3a+b=5$$

15. 직선 $(a-2)x-y-b+1=0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이고, 점 $(1, 0)$ 을 지날 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = (a-2)x - b + 1$ 에서 기울기는

$$a-2 = \tan 45^\circ = 1$$

$$\therefore a = 3$$

직선 $y = x - b + 1$ 이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

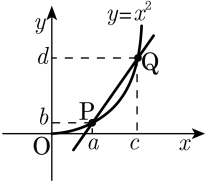
$$0 = 1 - b + 1$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

16. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ의 기울기는?(단, $0 < a < c$)

- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$



해설

점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$
 즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ ($\because 0 < a < c$)
 $(\overline{PQ} \text{의 기울기}) = \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a}$
 $= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a}$
 $= c+a = \sqrt{d} + \sqrt{b} = 2$

17. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

18. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$

19. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$, $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$

$\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

20. 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 $ab < 0, bc > 0$ 일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

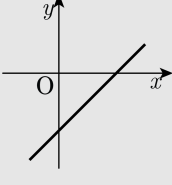
주어진 조건에서

$ab < 0, bc > 0$ 이므로

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$$

$\therefore$ (기울기) > 0 , (y 절편) < 0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로 지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



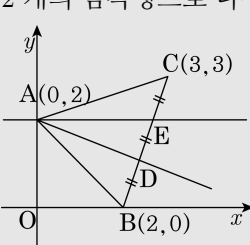
21. 점 A(0, 2), B(2, 0), C(3, 3) 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다.
△ABC 가 직선 $(k + 1)x + (k - 1)y = 2(k - 1)$ 에 의해 두 개의 도
형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k
값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x + y - 2) + x - y + 2 = 0$ 은 k 에 관계없이
A(0, 2) 를 지나는 직선이므로
△ABC 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 1 : 2 또는 2 : 1 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

D $\left(\frac{7}{3}, 1\right)$, E $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$$k\left(\frac{7}{3} + 1 - 2\right) + \frac{7}{3} - 1 + 2 = 0$$

$k = -\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because k$ 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$$k\left(\frac{8}{3} + 2 - 2\right) + \frac{8}{3} - 2 + 2 = 0$$

$$\therefore k = -1$$