1. 다음 표는 A, B, C, D, E 인 5 명의 학생의 수학 쪽지 시험의 결과를 나타낸 것이다. 이 자료의 분산은?

학생	A	B	C	D	E
변량(점)	7	9	6	7	6

① 1　② 1.2　③ 1.4　④ 1.6　⑤ 1.8

해설

주어진 자료의 평균은

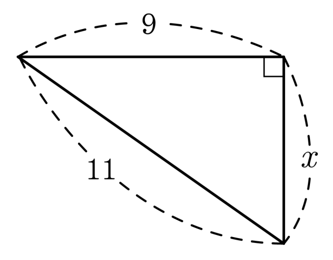
$$\frac{7+9+6+7+6}{5}=\frac{35}{5}=7(\text{점})$$

이므로 각 자료의 편차는 $0,\ 2,\ -1,\ 0,\ -1$ 이다.

따라서 분산은

$$\frac{0^2+2^2+(-1)^2+0^2+(-1)^2}{5}=\frac{6}{5}=1.2$$

2. 다음 그림의 직각삼각형에서 x 의 값은?



① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{30}$ ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

피타고라스 정리에 따라
$9^2 + x^2 = 11^2$
$x^2 = 121 - 81 = 40$
$x > 0$ 이므로 $x = 2\sqrt{10}$ 이다.

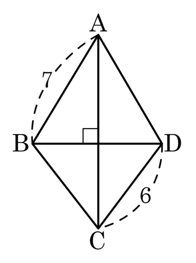
3. 세 변의 길이가 각각 다음과 같을 때, 둔각삼각형인 것은?

① 3cm, 3cm, 4cm
② 3cm, 4cm, 5cm
③ 4cm, 4cm, 7cm
④ 5cm, 12cm, 13cm
⑤ 6cm, 8cm, 9cm

해설

세 변의 길이가 a , b , c ($a < b < c$) 일 때, $a^2 + b^2 < c^2$ 일 때 둔각삼각형이므로
③ $7^2 > 4^2 + 4^2$ 이다.

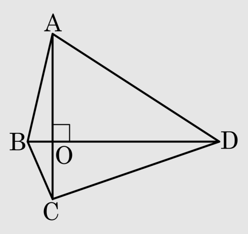
4. 다음 그림의 □ABCD 에서 $\overline{AB} = 7$, $\overline{CD} = 6$ 일 때, $\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$ 의 값은?



① $\sqrt{13}$ ② $\sqrt{85}$ ③ 13

④ 85 ⑤ 169

해설

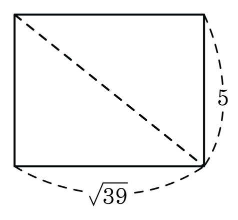


대각선이 수직인 사각형에서는 다음 관계가 성립한다.

$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2$

$\therefore\ \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 7^2 + 6^2 = 85$

5. 다음 그림에서 직사각형의 대각선의 길이는?



① $2\sqrt{15}$ ② $3\sqrt{7}$ ③ 8 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ 9

해설

피타고라스 정리에 따라
$\sqrt{5^2+\sqrt{39}^2}=8$ 이다.

6. 다음 표는 20 명의 학생에 대한 턱걸이 횟수의 기록을 나타낸 도수분포표이다. 턱걸이 횟수의 평균이 8 회 일 때, a, b 의 값은?

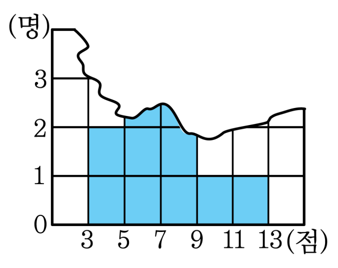
계급값 (회)	6	7	8	9	10	합계
도수	2	a	8	4	b	20

① $a=1,\ b=5$ ② $a=2,\ b=4$ ③ $a=3,\ b=2$
④ $a=4,\ b=2$ ⑤ $a=5,\ b=1$

해설

전체 학생 수가 20 명이므로 $2+a+8+4+b=20$
$\therefore\ a+b=6 \cdots$ ㉠
또한, 평균이 8 회 이므로
$\dfrac{6\times2+7\times a+8\times8+9\times4+10\times b}{20}=8$,
$12+7a+64+36+10b=160$
$\therefore\ 7a+10b=48 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=2$
$\therefore\ a=4,\ b=2$

7. 다음 그림은 A 반 학생 10 명의 수학 쪽지 시험의 성적을 조사하여 만든 것인데 일부가 찢어졌다. 계급값이 8인 학생이 전체의 20 % 일 때, 전체 학생의 평균을 구하여라.



▶ 답 : 점

▷ 정답 : 7점

해설

계급값 8 에 대한 도수는 $10\times\frac{20}{100}=2$(명)

한편, 계급값 6 에 대한 도수를 x 라고 하면 도수의 합은 10 이므로 $10-(2+2+1+1)=4$

$\therefore x=4$

따라서 구하는 평균은

$\frac{4\times2+6\times4+8\times2+10\times1+12\times1}{10}=$

$\frac{8+24+16+10+12}{10}=7$(점) 이다.

8. 5개의 변량 $4, 5, x, 11, y$의 평균이 6이고 분산이 8일 때, $x^2 + y^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 58

해설

5개의 변량의 평균이 6이므로 $x + y = 10$이다.

$$\frac{(4-6)^2 + (5-6)^2 + (x-6)^2}{5} + \frac{(11-6)^2 + (y-6)^2}{5} = 8$$

$$4 + 1 + (x-6)^2 + 25 + (y-6)^2 = 40$$

$$x^2 + y^2 - 12(x+y) + 72 + 30 = 40$$

$$x^2 + y^2 - 12(10) + 72 + 30 = 40$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 58$$

9. 3개의 변량 x, y, z의 변량 x, y, z의 평균이 8, 표준편차가 5일 때, 변량 $2x, 2y, 2z$의 평균이 m, 표준편차가 n이라 한다. 이 때, $m+n$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

해설

x, y, z의 평균과 표준편차가 8, 5이므로

$$\frac{x+y+z}{3} = 8$$

$$\frac{(x-8)^2+(y-8)^2+(z-8)^2}{3} = 5^2 = 25$$

이 때, $2x, 2y, 2z$의 평균은

$$m = \frac{2x+2y+2z}{3} = \frac{2(x+y+z)}{3} = 2 \cdot 8 = 16$$

분산은

$$m^2 = \frac{(2x-16)^2+(2y-16)^2+(2z-16)^2}{3}$$

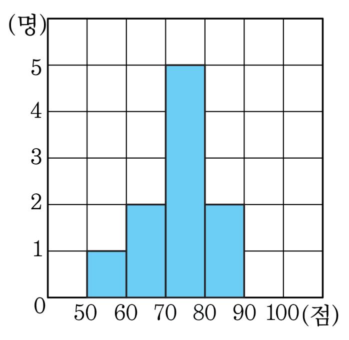
$$= \frac{4\left\{(x-8)^2+(y-8)^2+(z-8)^2\right\}}{3}$$

$$= 4 \cdot 25 = 100$$

$$n = \sqrt{100} = 10$$

$$\therefore m+n = 16+10 = 26$$

10. 다음 히스토그램은 학생 10명의 영어 성적을 나타낸 것이다. 이 자료의 분산은?



① 72 ② 74 ③ 76 ④ 78 ⑤ 80

해설

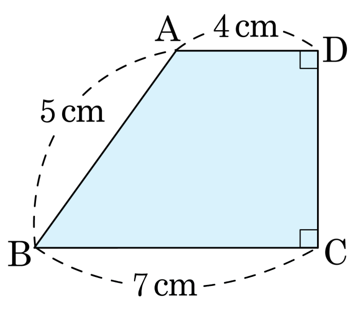
(평균)$= \dfrac{55\times1+65\times2+75\times5+85\times2}{10} = \dfrac{730}{10} = 73$(점)

(분산)$= \dfrac{1}{10}\{(55-73)^2\times1+(65-73)^2\times2$

$+\dfrac{1}{10}\{(75-73)^2\times5+(85-73)^2\times2\}$

$= \dfrac{760}{10} = 76$

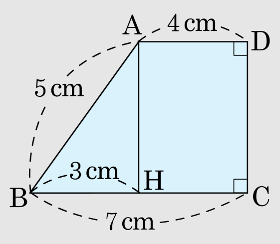
11. 다음 그림에서 □ABCD 가 $\overline{AB} = 5\text{cm}$, $\overline{BC} = 7\text{cm}$, $\overline{AD} = 4\text{cm}$ 인 사다리꼴일 때, $\overline{BD}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $\sqrt{65}$ cm

해설

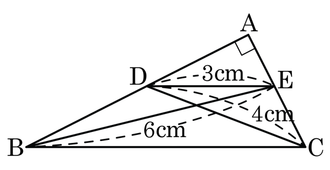


꼭짓점 A 에서 $\overline{BC}$ 로 수선의 발을 H 라 하자. △ABH 에서 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{AH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$ 가 된다.

$\overline{BD} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}(\text{cm})$

12. 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{DE} = 3\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 4\,\text{cm}$, $\overline{BE} = 6\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $\sqrt{43}$ cm

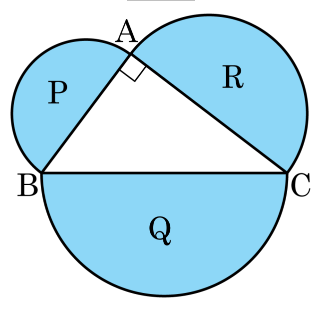
해설

$\overline{DE}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{EB}^2$ 이므로,

$x = \sqrt{6^2 + 4^2 - 3^2} = \sqrt{43}\ (\text{cm})$

13. 다음 보기에 주어진 직각삼각형 ABC 의 세 변을 각각 지름으로 하는 반원의 넓이를 P, Q, R 라 하자.

보기



$\mathrm{P} = \frac{9}{2}\pi\mathrm{cm}^2, \mathrm{Q} = \frac{25}{2}\pi\mathrm{cm}^2$ 일 때, $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 길이를 구하면?

① 5cm ② 6cm ③ 7cm ④ 8cm ⑤ 9cm

해설

$\mathrm{R} = \mathrm{Q} - \mathrm{P}$ 이다.

$\mathrm{R} = \frac{25}{2}\pi - \frac{9}{2}\pi = 8\pi(\mathrm{cm}^2)$ 이므로

$\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2}\right)^2 = 8\pi$ 에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 64$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AC}} = 8\mathrm{cm}(\because \overline{\mathrm{AC}} > 0)$ 이다.

14. 직선 $y = 3x - 5$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ a)$, $\mathrm{B}(b,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $5\sqrt{10}$

해설

점 $\mathrm{A}(-2, a)$ 를 대입하면 $a = 3(-2)-5,\ a = -11$ 이고, 점 $\mathrm{B}(b, 4)$ 를 대입하면 $4 = 3b - 5,\ 3b = 9,\ b = 3$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이는 $\sqrt{(-2-3)^2 + (-11-4)^2} = 5\sqrt{10}$ 이다.

15. 다음 표는 5 개의 학급 A, B, C, D, E에 대한 학생들의 수학 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, 각 학급의 학생 수는 모두 같다.)

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	67	77	73	67	82
표준편차	2.1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\sqrt{4.4}$	$\sqrt{3}$

① A 학급의 학생의 성적이 B 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

② B 학급의 학생의 성적이 D 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

③ 중위권 성적의 학생은 A 학급보다 C 학급이 더 많다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 E 학급이다.

⑤ D 학급의 학생의 성적이 평균적으로 C 학급의 학생의 성적보다 높은 편이다.

해설

표준편차를 근호를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

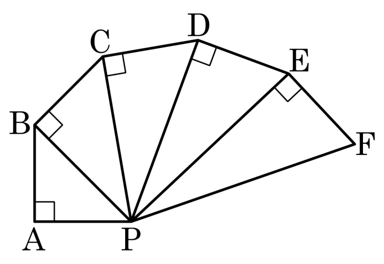
학급	A	B	C	D	E
표준편차	$2.1 = \sqrt{4.41}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{1.1}$	$\sqrt{4.4}$	$\sqrt{3}$

① B 학급의 학생의 성적이 A 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 C 학급이다.

⑤ C 학급의 학생의 성적이 평균적으로 D 학급의 학생의 성적보다 높은 편이다.

16. 다음 그림에서 $\overline{PF}$의 길이를 구하여라. (단, $\overline{AP}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=1\,\text{cm}$)



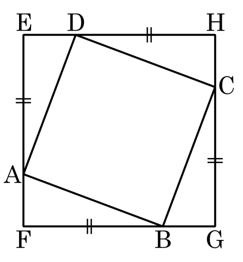
▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : $\sqrt{6}$ cm

해설

$\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCD$, $\triangle PDE$,
$\triangle PEF$ 는 모두 직각삼각형이므로
피타고라스 정리를 이용하면
$\overline{PB}=\sqrt{2}(\text{cm}), \overline{PC}=\sqrt{3}(\text{cm})$,
$\overline{PD}=2(\text{cm}), \overline{PE}=\sqrt{5}(\text{cm})$
$\overline{PF}=\sqrt{6}(\text{cm})$

17. 다음 그림에서 사각형 ABCD 와 EFGH 는 모두 정사각형이고 □ABCD $= 73\,\text{cm}^2$, □EFGH $= 121\,\text{cm}^2$, $\overline{\text{BF}} > \overline{\text{BG}}$ 일 때, $\overline{\text{BG}}$ 의 길이는?

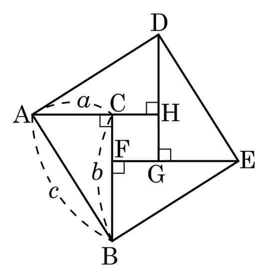


① $3\,\text{cm}$　② $\frac{7}{2}\,\text{cm}$　③ $4\,\text{cm}$
④ $8\,\text{cm}$　⑤ $\frac{15}{2}\,\text{cm}$

해설

□ABCD $= 73\,\text{cm}^2$, □EFGH $= 121\,\text{cm}^2$ 이므로 $\overline{\text{AB}} = \sqrt{73}\,\text{cm}$,
$\overline{\text{FG}}\,\text{cm} = 11\,\text{cm}$ 이다.
$\overline{\text{BG}} = x\,\text{cm}$, $\overline{\text{FB}} = y\,\text{cm}$ 라고 할 때,
$x + y = 11$, $x^2 + y^2 = 73$ 이 성립한다.
$y = 11 - x$ 를 대입하여 정리하면 $x^2 - 11x + 24 = 0$
인수분해를 이용하면 $(x-3)(x-8) = 0$ 이므로 $x = 3$ ($\because \overline{\text{BF}} > \overline{\text{BG}}$)이다.

18. 다음 그림은 직각삼각형 ABC와 합동인 삼각형을 붙여 정사각형 ABED를 만든 것이다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $\triangle ABC \equiv \triangle EDG$

② $\overline{AC} = \overline{DH} = \overline{GE} = \overline{CF}$

③ $\overline{FG} = b - a$

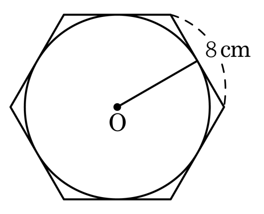
④ $\square ABED = \square CFGH + \triangle AHD + \triangle ABC + \triangle EFB + \triangle GDE$

⑤ $\square CFGH$는 정사각형

해설

② $\overline{AC} = \overline{DH} = \overline{GE} = \overline{BF}$, $\overline{CF} = \overline{BC} - \overline{BF}$

19. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 8 cm 인 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

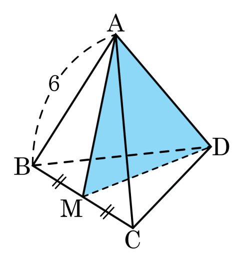
▷ 정답 : $4\sqrt{3}$ cm

해설

정육각형을 6 개의 정삼각형으로 나누면 한 변의 길이가 8 cm 인 정삼각형이 된다.

정삼각형의 높이가 원의 반지름이 되므로 구하면 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$ (cm) 이다.

20. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6 인 정사면체 A – BCD 에서 점 M 이 $\overline{BC}$ 의 중점일 때, $\triangle$AMD 의 넓이는?



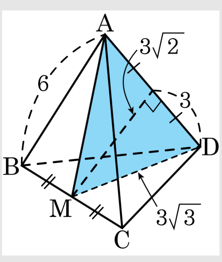
① 9 ② 10 ③ $9\sqrt{6}$ ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

해설

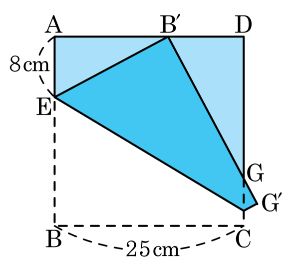
$\triangle$AMD 는 $\overline{AM} = \overline{DM} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형이고

$\triangle$AMD 의 높이는 $\sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 이다.

$\therefore \triangle AMD = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$



21. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 25cm 인 정사각형 ABCD 에 $\overline{\mathrm{AE}} = 8\mathrm{cm}$ 이고, 점 B 가 $\overline{\mathrm{AD}}$ 위에 오도록 접었을 때, $\overline{\mathrm{B'G}}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ____________ cm

▷ 정답 : $\frac{85}{4}$ cm

해설

$\overline{\mathrm{EB}} = \overline{\mathrm{EB'}} = 25 - 8 = 17(\mathrm{cm})$

$\triangle\mathrm{AEB'}$ 에서 $\overline{\mathrm{AB'}} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15(\mathrm{cm})$

$\overline{\mathrm{B'D}} = \overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{AB'}} = 25 - 15 = 10(\mathrm{cm})$

$\triangle\mathrm{AEB'} \backsim \triangle\mathrm{DB'G}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AE}} : \overline{\mathrm{B'D}} = \overline{\mathrm{EB'}} : \overline{\mathrm{B'G}}$

$8 : 10 = 17 : \overline{\mathrm{B'G}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{B'G}} = \frac{85}{4}(\mathrm{cm})$

22. 넓이가 16π 인 원 O 에 외접하는 삼각형 중 세 변의 길이가 연속하는 자연수인 삼각형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 84

해설

삼각형의 세 변의 길이가 연속하는 자연수이므로 세 변의 길이를 각 각 x, $x+1$, $x+2$ 로 놓으면 헤론의 공식에 의해

$\mathrm{s}=\dfrac{x+(x+1)+(x+2)}{2}=\dfrac{3x+3}{2}$ 에서

$\triangle ABC=\dfrac{x+1}{4}\sqrt{3(x-1)(x+3)}\cdots$ ㉠

한편, 내접원의 넓이가 16π 이므로 내접원의 반지름의 길이는 4 이다.

$\therefore \triangle ABC$

$=\dfrac{1}{2}x\times 4+\dfrac{1}{2}(x+1)\times 4+\dfrac{1}{2}(x+2)\times 4$

$=6(x+1)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{x+1}{4}\sqrt{3(x-1)(x+3)}=6(x+1)$ 따라서, 삼각형의 넓이는

$\therefore x=13(x>0)$

$6(13+1)=84$ 이다.

23. $\overline{\mathrm{AB}}=3,\ \overline{\mathrm{BC}}=5,\ \overline{\mathrm{CD}}=6,\ \overline{\mathrm{DA}}=4$ 인 사각형 ABCD 의 대각선의 길이가 각각 $2\sqrt{10},\ 3\sqrt{5}$ 일 때, 두 대각선의 중점 사이의 거리를 구하여라

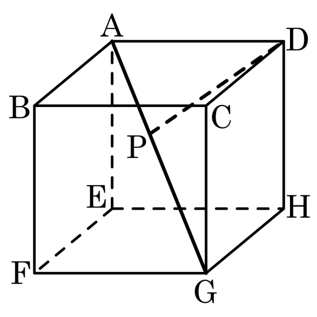
▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

대각선 $\overline{\mathrm{AC}},\ \overline{\mathrm{BD}}$ 의 중점을 각각 F, E 라 하고, 보조선 BF 와 DF 를 그으면
$\triangle$ABC 에서 파푸스의 정리에 의해
$3^2+5^2=2(\overline{\mathrm{BF}^2}+\overline{\mathrm{AF}^2})\cdots$①
$\triangle$ADC 에서 파푸스의 정리에 의해
$4^2+6^2=2(\overline{\mathrm{DF}^2}+\overline{\mathrm{AF}^2})\cdots$②
① + ② 을 하면
$3^2+4^2+5^2+6^2=2(\overline{\mathrm{BF}^2}+\overline{\mathrm{DF}^2})+4\overline{\mathrm{AF}^2}$
$\triangle$BFD 에서 파푸스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{BF}^2}+\overline{\mathrm{DF}^2}=2(\overline{\mathrm{EF}^2}+\overline{\mathrm{DE}^2})\cdots$③
또, $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AF}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AC}^2}=4\overline{\mathrm{AF}^2}\cdots$④
$\overline{\mathrm{BD}}=2\overline{\mathrm{DE}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}^2=4\overline{\mathrm{DE}^2}\cdots$⑤
$3^2+4^2+5^2+6^2$
$=2(\overline{\mathrm{BF}^2}+\overline{\mathrm{DF}^2})+4\overline{\mathrm{AF}^2}$
$=4(\overline{\mathrm{DE}^2}+\overline{\mathrm{EF}^2})+4\overline{\mathrm{AF}^2}$ ($\because$ ③)
$=4\overline{\mathrm{AF}^2}+4\overline{\mathrm{DE}^2}+4\overline{\mathrm{EF}^2}$
$=\overline{\mathrm{AC}^2}+\overline{\mathrm{BD}^2}+4\overline{\mathrm{EF}^2}$ ($\because$ ④, ⑤)
따라서, $86=(2\sqrt{10})^2+(3\sqrt{5})^2+4\overline{\mathrm{EF}^2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{EF}}=\frac{1}{2}$ 이다.

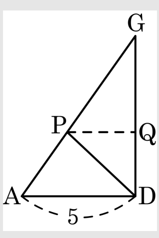
24. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 5 인 정육면체에서 대각선 AG 를 2 : 3 으로 내분하는 점을 P 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{17}$

해설



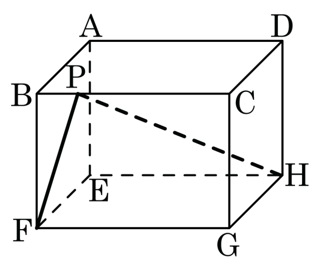
$\triangle$ADG 에서 $\overline{DG} = 5\sqrt{2}$, $\overline{AG} = 5\sqrt{3}$ 이고,
$(5\sqrt{2})^2 + 5^2 = (5\sqrt{3})^2$ 이므로 직각삼각형이다.
점 P 에서 $\overline{GD}$ 에 내린 수선의 발을 Q 라 하면
$\triangle$GPQ 와 $\triangle$GAD 는 닮음이고, $\overline{AP} : \overline{PG} = 2 : 3$ 이므로

$\overline{QD} = 5\sqrt{2} \times \frac{2}{5} = 2\sqrt{2}$

$\overline{PQ} = 5 \times \frac{3}{5} = 3$

따라서 $\overline{PD} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{17}$ 이다.

25. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AD} = 5$, $\overline{AE} = 3$ 인 직육면체의 모서리 BC 위의 점 P 에 대하여 $\overline{FP} + \overline{PH}$ 의 최솟값을 구하여라.

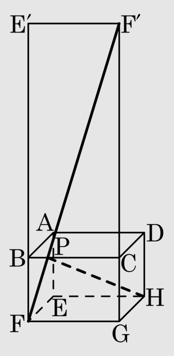


▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{89}$

해설

면 BCEH 를 $\overline{BC}$ 를 축으로 회전하여 면 BFGC 와 한 면이 되도록 두 점 E′, H′ 를 잡으면 $\overline{FP} + \overline{PH}$ 의 최솟값은 $\overline{FH'}$ 와 같다.



따라서 $\overline{GH'} = \overline{CG} + \overline{CH'} = 3 + \sqrt{4^2 + 3^2} = 8$ 이므로 $\overline{FH'} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$ 이다.