

1. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x - y - z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy - y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^6 - y^6$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

2. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때 $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 에서

$x^2 = 2$ 를 대입하면 $0 = 16 + 4a + b \cdots \textcircled{1}$

$x^4 = -1$ 을 대입하면 $0 = 1 - a + b \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -4$

$\therefore a + b = -7$

3. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 일 때, $(x^2+x+2)f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 3, f(-1) = -1$
 $(x^2+x+2)f(x) = (x^2-1)Q(x) + ax + b$
 $x = 1, x = -1$ 을 대입한다.
 $4f(1) = 12 = a + b \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $2f(-1) = -2 = -a + b \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면,
 $a = 7, b = 5$
 $\therefore$ 나머지 $R(x) = 7x + 5$
 $R(1) = 12$

4. 다음 <보기> 중 다항식 $x^4 - 7x^2 + 9$ 을 인수분해 할 때, 그 인수로 알맞은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $x^2 - 1$

㉡ $x^2 - x - 1$

㉢ $x^2 - x - 3$

㉣ $x^2 + x - 3$

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^2 + 9 &= x^4 - 6x^2 + 9 - x^2 \\ &= (x^2 - 3)^2 - x^2 \\ &= (x^2 - x - 3)(x^2 + x - 3) \\ \therefore \text{인수} : (x^2 - x - 3), (x^2 + x - 3) \end{aligned}$$

5. x 에 관한 세 개의 다항식 $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, $B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $C(x) = x(x-3)(x^2+a) - (x-3)(x^2+b) + 8$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ 2

해설

$$A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$

$$B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

$$= (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$$

$$\therefore \text{두 다항식의 최대공약수는 } (x-1)(x+1)(x-3)$$

그런데 다항식 $C(x)$ 는 $x-3$ 으로 나누어떨어지지 않으므로

세 다항식의 최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 이다.

$$\therefore \text{다항식 } C(\pm 1) = 0$$

$$\therefore C(1) = -a + b + 4 = 0, \quad C(-1) = a + b + 4 = 0$$

$$\therefore a = 0, \quad b = -4 \text{에서 } a + b = -4$$

6. 실수 x, y 에 대하여, 등식 $2x + y + (x - 3y)i = 3 + 2i$ 가 성립할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x + y = 3, x - 3y = 2$ 이므로

$$x = \frac{11}{7}, y = -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{11}{7} \times -\frac{7}{1} = -11$$

7. 복소수 z 가 $z + \frac{1}{z} = 2i$ 를 만족할 때, $z^4 + \frac{1}{z^4}$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1 ② 8 ③ 20 ④ 32 ⑤ 34

해설

$$\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2i, \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = -4$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 = -4, z^2 + \frac{1}{z^2} = -6$$

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 = 36, z^4 + \frac{1}{z^4} = 36 - 2 = 34$$

8. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$
모든 x 에 대해 성립하려면
 $a^2 - 4a + 3 = 0, a - 1 = 0$
공통근 : $a = 1$

9. x 에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값의 합은?

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 중근을 가질 조건은 $D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - (m+3)(2m-1) = 0$$

$$4m^2 - (2m^2 + 5m - 3) = 0$$

$$2m^2 - 5m + 3 = 0$$

$$(m-1)(2m-3) = 0$$

$$\therefore m = 1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

$$\therefore 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

10. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$ 의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 $n, n + 1$ 이라 하면

$$\begin{cases} n + (n + 1) = a \cdots \cdots \textcircled{A} \\ n(n + 1) = a + 1 \cdots \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } n = \frac{a - 1}{2} \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

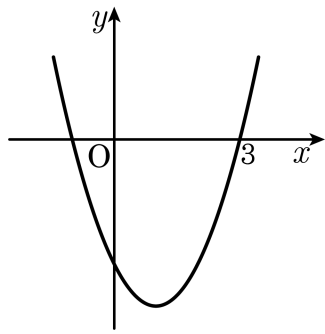
$$\frac{a - 1}{2} \left(\frac{a - 1}{2} + 1 \right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a + 1)(a - 5) = 0$

$$a = -1, 5$$

$$\therefore -1 + 5 = 4$$

11. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 - 2x - 3$ 의 그래프이다. 이 함수의 최솟값을 구하여라.



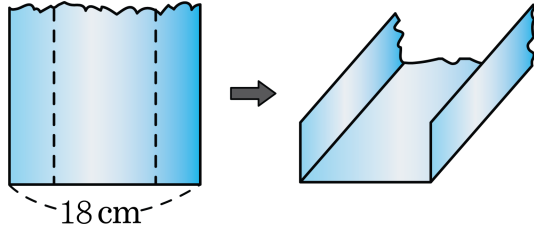
▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y = ax^2 - 2x - 3$ 이 점 $(3, 0)$ 을
지나므로 $0 = 9a - 6 - 3, a = 1$
 $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$
 $x = 1$ 일 때, 최솟값은 -4 이다.

12. 다음 그림과 같이 너비가 18cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 되도록 하려면 물받이의 높이를 얼마로 해야 하는가?



- ① 4.5 cm ② 4.0 cm ③ 3.8 cm
 ④ 3.6 cm ⑤ 3.4 cm

해설

물받이의 높이를 x 라 할 때,
 단면의 넓이는 $y = x(18 - 2x)$

$$y = -2x^2 + 18x = -2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$$

따라서 $x = \frac{9}{2}(\text{cm})$ 일 때, 최대값 $\frac{81}{2}(\text{cm}^2)$ 를 갖는다.

13. x, y, z 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x - ay + z = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x - 3by + 2az = 0 \cdots \textcircled{2} \\ x + 2by = 0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

에서 x, y, z 가 동시에 0이 아닌 해가 존재하도록 0이 아닌 양의 정수 a, b 의 값을 정하면, 그 때의 $x : y : z$ 의 값은?

① $-1 : 1 : 5$ ② $-2 : 1 : 5$ ③ $-3 : 1 : 5$

④ $-4 : 1 : 5$ ⑤ $-5 : 1 : 5$

해설

$$\begin{cases} x - ay + z = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x - 3by + 2az = 0 \cdots \textcircled{2} \\ x + 2by = 0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

① $\times 2a -$ ③ 하면

$$(2a - 1)x - (2a^2 - 3b)y = 0 \cdots \textcircled{4}$$

④, ⑤에서 x 를 소거하면 $(2a^2 + 4ab - 5b)y = 0$

만일 $2a^2 + 4ab - 5b \neq 0$ 이면 $y = 0$

이것을 ③에 대입하면 $x = 0$

또, ①에서 $z = 0$ 이것은 $x = y = z = 0$ 이 되어 조건에 부적당하다.

따라서 $2a^2 + 4ab - 5b = 0$

b 에 대해 풀면 $b(4a - 5) = -2a^2, b = \frac{-2a^2}{4a - 5}$ 에서 우변이 정수가

되도록 정리하면

$$\begin{aligned} 8b &= \frac{-16a^2}{4a - 5} \\ &= \frac{(4a - 5)(-4a - 5) - 25}{(4a - 5)} \\ &= -4a - 5 - \frac{25}{4a - 5} \end{aligned}$$

위의 식에서 $|4a - 5|$ 는 25의 약수가 되어야 하므로

$\therefore 4a - 5 = \pm 1, \pm 5, \pm 25$ 0이 아닌 a 의 양의 정수값은 $a = 1$

$\therefore b = 2$

①, ③에서 $x = -4y, z = 5y$

$\therefore x : y : z = (-4) : 1 : 5$

14. $a-1 < x < a+1$ 을 만족하는 모든 x 가 $-1 < x < 3$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 2$

② $0 \leq a \leq 2$

③ $a < 0, a > 2$

④ $a \leq 0, a \geq 2$

⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \geq -1$ 이고, $a+1 \leq 3$ 이어야 하므로

$$a \geq 0, a \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2$$

15. 1 개에 700 원 하는 콜라와 1 개에 600 원 하는 사이다를 합해서 20 개를 사려고 한다. 콜라를 사이다 보다 많이 사고 전체 금액이 13,500 원 이하가 되도록 하려고 한다. 콜라를 최소 a 개 살 수 있고, 최대 b 개 살 수 있다고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 26$

해설

콜라의 개수를 x 개라고 놓으면 사이다의 개수는 $(20 - x)$ 개이다. 콜라를 사이다 보다 많이 사게 되면 $x > 20 - x$ 이다.

콜라와 사이다를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $700x + 600(20 - x)$ 이다. 또 전체 금액은 13,500 원 이하가 되어야 하기 때문에 $700x + 600(20 - x) \leq 13500$ 이다.

위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} x > 20 - x \\ 700x + 600(20 - x) \leq 13500 \end{cases} \quad \text{이다.} \quad \text{이를 간단히 하면}$$

$$\begin{cases} x > 10 \\ x \leq 15 \end{cases} \quad \text{이다. 따라서 } 10 < x \leq 15 \text{ 이다. 그러므로 콜라}$$

는 최소로 11 개, 최대로 15 개 살 수 있다. 따라서 $a = 11$, $b = 15$ 이다.

따라서 $a + b = 11 + 15 = 26$ 이다.

16. 사탕을 포장하는데 한 박스에 4개씩 넣으면 12개가 남고, 6개씩 넣으면 3개 이상 5개 미만이 남는다고 한다. 전체 사탕의 개수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28개

해설

묶음의 수를 x 묶음이라 하면
사탕의 수 : $(4x + 12)$ 개
 $6x + 3 \leq 4x + 12 < 6x + 5$
$$\begin{cases} 6x + 3 \leq 4x + 12 \\ 4x + 12 < 6x + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 9 \\ -2x < -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{9}{2} \\ x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

 $\frac{7}{2} < x \leq \frac{9}{2}$ 에서 x 는 자연수이어야 하므로 $x = 4$
 $\therefore$ 사탕의 수는 $4 \times 4 + 12 = 28$ (개) 이다.

17. 두 함수 $f(x) = mx^2 - 4x + 4$, $g(x) = -2x^2 + 2mx$ 가 모든 실수 x 에 대하여 항상 $g(x) < f(x)$ 를 만족할 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-5 \leq m < 5$ ② $-4 \leq m < 4$ ③ $-3 \leq m < 3$
④ $-2 \leq m < 2$ ⑤ $-1 \leq m < 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 항상

$g(x) < f(x)$ 이므로

$$f(x) - g(x) > 0$$

$$\text{즉, } f(x) - g(x) = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + 4 > 0$$

$$(i) \ m+2=0 \text{ 일 때 } f(x) - g(x) = 4 > 0$$

따라서, $m = -2$ 일 때 성립한다.

(ii) $m+2 \neq 0$ 일 때 부등식이 항상 성립하려면

이차방정식

$$(m+2)x^2 - 2(m+2)x + 4 = 0 \text{의 판별식을 D라 할 때}$$

$$m+2 > 0, \ D < 0$$

$$m+2 > 0 \text{에서 } m > -2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{D}{4} = (m+2)^2 - 4(m+2) < 0 \text{에서}$$

$$(m+2)(m+2-4) < 0, \ (m+2)(m-2) < 0$$

$$\therefore -2 < m < 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } -2 < m < 2$$

따라서, (i), (ii)에서 $-2 \leq m < 2$

18. 이차부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 의 해가 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ 일 때 이차부등식 $bx^2 + 5x + a \geq 0$ 의 해를 구한 것은 ?

- ① $-6 \leq x \leq -1$ ② $-3 \leq x \leq -2$ ③ $2 \leq x \leq 3$
④ $1 \leq x \leq 6$ ⑤ $1 \leq x \leq 3$

해설

1. 이차부등식 $ax^2 + 5x + b > 0 \cdots \textcircled{1}$

이라 놓으면 ① 의 해가

$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ 이므로

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x + \frac{1}{6} < 0$$

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} < 0, -6x^2 + 5x - 1 > 0$$

$$\therefore ax^2 + 5x + b = -6x^2 + 5x - 1$$

$$\therefore a = -6, b = -1 \cdots \textcircled{2}$$

2. $bx^2 + 5x + a \geq 0$ 의 부등식에 ② 를 대입하면

$$-x^2 + 5x - 6 \geq 0, x^2 - 5x + 6 \leq 0,$$

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 3$$

19. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x축 위에 있을 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

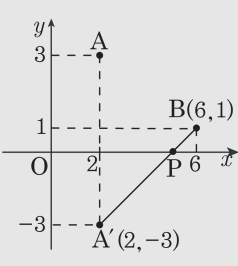
(2, 3)을 x축에 대해

대칭이동한 점을

A'(2, -3)라 하면

최단거리는 $\overline{A'B}$ 의 길이

$\therefore \sqrt{(2-6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$



20. 좌표평면 위에 세 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(3, -2)$ 가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고
 $\sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
 따라서 준식은 세 점 O, A, B 가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며 이 때 $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ 이다.
 따라서 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은 $\overline{OB} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ 이다.

