1. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$ 을 전개한 식에서 x^3 의 계수는?

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

해설

$2x^3\times 8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times 2x^3=39x^3$

2. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144　　② 196　　③ 288　　④ 308　　⑤ 496

해설

세 모서리를 $x,\ y,\ z$라 하면
$x+y+z=22\cdots\cdots$①
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14\cdots\cdots$②이고
겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.
①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

3. 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$가 $x^2 + 2$로 나누어 떨어질 때, $3a + b$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$\quad = (x^2 + 2)(x - \alpha)$ 라 놓을 수 있다.

$x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha = x^3 - 4x^2 + ax + b$

$\therefore\ \alpha = 4,\quad a = 2,\quad b = -8$

$\therefore\ 3a + b = -2$

4. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x-2$로 나누어 떨어지고 또, $x-3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x-2$ 로 나누어 떨어지려면

$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$

$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)$ 가 $x-3$ 으로 나누어 떨어지려면

$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$

$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

5. $\dfrac{(2x-1)(2y-1)}{(2x-1)^2+(2y-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$ 일 때, $x+y$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$2x-1=u,\ 2y-1=v$ 라 놓으면

$\dfrac{uv}{u^2+v^2}=-\dfrac{1}{2}$ 에서

$u^2+v^2=-2uv,\ (u+v)^2=0$

$\therefore\ u+v=0$

$(2x-1)+(2y-1)=0,\ x+y=1$

6. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore\ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

7. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2, 2x^3 + (a-2)x^2 - 2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 3 = x^2(x+2) - (x+2)$

$= (x+2)(x-1)(x-2)$

$2x^3 + (a-2)x^2 - 2x = x(2x^2 + (a-2)x - 2) \cdots ①$

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x = -2, -1, 1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.

$x = -2$ 일 때, $8 - 2a + 4 - 2 = 0,\ a = 5$

$x = -1$ 일 때, $2 - a + 2 - 2 = 0,\ a = 2$

$x = 1$ 일 때, $2 + a - 2 - 2 = 0,\ a = 2$

$x = -1,\ 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x+1)(x-1)$

$\therefore\ a = 2$

8. 자연수 a, b의 최대공약수를 (a, b)로 나타낼 때, 다음과 같은 성질이 알려져 있다.

a를 b 로 나누었을 때 몫을 q , 나머지를 r라고 하면 $a = bq + r$ $(0 \le r < b)$이고, 이 때, $(a,\ b) = (b,\ r)$가 성립한다.

다음은 위의 성질을 이용하여 1996 과 240 의 최대공약수를 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은?

$(1996, 240) = (240,$ (가)$)=($(가)$, 12) = (12,$ (나)$)=$(나)

① (가)= 74, (나)= 2
② (가)= 72, (나)= 6
③ (가)= 78, (나)= 2
④ (가)= 76, (나)= 6
⑤ (가)= 76, (나)= 4

해설

$1996 = 240 \cdot 8 + 76,\ 240 = 76 \cdot 3 + 12$
$76 = 12 \cdot 6 + 4$ 이므로
$(1996,\ 240) = (240,\ 76) = (76,\ 12) = (12,\ 4) = 4$

9. 복소수 α,β 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$(단, $\alpha\neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$

⑤ $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha=2,\ \overline{\alpha}=2$

10. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^7 + x^4 + 2$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$x^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$x^3 = x \cdot x^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{-1+3i^2}{4} = -1$$

$$\therefore\ x^7 + x^4 + 2 = (x^3)^2 \cdot x + x^3 \cdot x + 2 = x - x + 2 = 2$$

11. $\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$ 일 때, $|a-1|+|a|+|a+1|$ 을 간단히 하면?

① $-a+2$　　② $-a$　　③ 2
④ a　　⑤ $a-2$

해설
$a+1 \geq 0,\ a<0 \Rightarrow -1 \leq a < 0$
$\therefore$ (준식) $= -(a-1)-(a)+(a+1)$
$= -a+2$

12. 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 α,β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

ⅰ) $x<-1$일 때,
$-(x+1)-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)
ⅱ) $-1 \le x < 2$일 때,
$x+1-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=0$
ⅲ) $x \ge 2$일 때,
$x+1+x-2=x+3$
$\therefore\ x=4$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $x=0,\ 4$
$\therefore\ \alpha+\beta=4$

13. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

14. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 합은 2이다.
② 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 차는 4이다.
③ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 곱은 5이다.
④ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
⑤ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은 -6이다.

해설

$ax^2+bx+c=0$에서

두근의 합 : $-\dfrac{b}{a}$

두근의 곱 : $\dfrac{c}{a}$

두근의 차 : $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

$\therefore$ ② (두근의 차)$=4i$

15. x에 대한 이차함수 $y=x^2-2kx+k^2-4k$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 직선 $y=2ax-a^2$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

이차함수 $y=x^2-2kx+k^2-4k$ 의 그래프가 직선 $y=2ax-a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-4k=2ax-a^2$

즉, $x^2-2(k+a)x+k^2+a^2-4k=0$ 의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+a^2-4k)=2ak+4k=(2a+4)k$ 이고

k 의 값에 관계없이 $D=0$ 이어야 하므로

$2a+4=0$

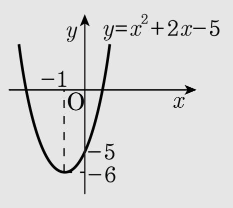
$\therefore a=-2$

16. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y=|x^2+2x-5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

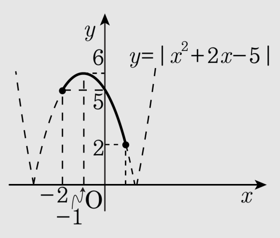
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=x^2+2x-5=(x+1)^2-6$ 이므로
$y=x^2+2x-5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y=|x^2+2x-5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y=|x^2+2x-5|$ 의 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $y=6$, 최솟값은 $x=1$ 일 때 $y=2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

17. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 모두 구하면?

① -1 ② $0, 8$ ③ $-1, 8$
④ $-1, 0, -8$ ⑤ $-1, 0, 8$

해설

(i) $x=1$을 중근으로 가질 때
$x=1$을 $x^2-ax+2a=0$에 대입하면 $a=-1$
(ii) $x^2-ax+2a=0$이 중근을 가질 때
$D=a^2-8a=0$
$\therefore$ $a=0$ 또는 8
(i), (ii)에 의하여 $a=-1,\ 0,\ 8$

18. $0 \le x+2y \le 1$, $0 \le -x+y \le 1$일 때 $2x+3y$ 의 최댓값과 최솟값의 차는 ?

① 0　② 1　③ 3　④ 4　⑤ 6

해설

$$\begin{array}{rl} & 0 \le x+2y \le 1 \\ +) & \underline{0 \le -x+y \le 1} \\ & 0 \le \ 3y \ \le 2 \cdots\cdots ㉠ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 0 \le \ x+2y \le 1 \\ -) & \underline{0 \le -2x+2y \le 2} \\ & -2 \le 3x \le 1 \rightarrow -\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{3} \cdots\cdots ㉡ \end{array}$$

㉠ + ㉡ × 2하면

$$\begin{array}{rl} & 0 \le 3y \le 2 \\ +) & \underline{-\frac{4}{3} \le 2x \le \frac{2}{3}} \end{array}$$

$\therefore -\frac{4}{3} \le 3y+2x \le \frac{8}{3}$

$\therefore$ 최댓값 $-$ 최솟값 $= \frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{3} = 4$

19. 연립부등식 $5x - 5 \leq 7x - 1 < 10x + 2$을 풀면?

① $x < -3$　② $x > -3$　③ $x < -1$
④ $x > -1$　⑤ $x < 3$

해설

$5x - 5 \leq 7x - 1 < 10x + 2$에서
$5x - 5 \leq 7x - 1$이고, $7x - 1 < 10x + 2$
$5x - 5 \leq 7x - 1$, $x \geq -2$
$7x - 1 < 10x + 2$, $x > -1$
$\therefore\ x > -1$

20. 연립부등식 $x < -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$ 의 해가 $-\frac{1}{3} < x < b$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{7}$

해설

(ⅰ) $x < -\frac{3x-a}{4}$, $4x < -3x+a$

$\therefore\ x < \frac{a}{7}$

(ⅱ) $-\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$, $-3x < 2-a$

$\therefore\ x > \frac{a-2}{3}$

$\therefore\ \frac{a-2}{3} < x < \frac{a}{7}$

$\frac{a-2}{3} = -\frac{1}{3}$, $a = 1$

$\frac{a}{7} = b$, $b = \frac{1}{7}$

$\therefore\ ab = 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

21. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면
$-8 \le x^2-8 \le 8$
$0 \le x^2 \le 16$
$\therefore -4 \le x \le 4$
$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면
$-k < x-2 < k$
$-k+2 < x < k+2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면
$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로
$k \le 6,\ k \le 2$
$\therefore 0 < k \le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

22. $|p| < 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

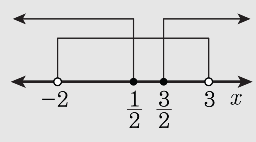
$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면
$-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은
$f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3 \cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1,\ x = 1,\ x \ge 3$
그런데 $x = 1$ 일 때,
$f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로
주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \le -1,\ x \ge 3$

23. 다음 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \leq b$ 또는 $c \leq x < d$일 때 $a + b + c + d$의 값은?

① -2 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \rightarrow -2 < x < 3 \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{1}{2}, x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

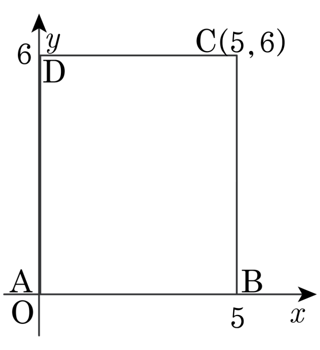


$-2 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} \leq x < 3$

$a = -2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = 3$

$\therefore a + b + c + d = 3$

24. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(5,0)$, $\mathrm{C}(5,6)$, $\mathrm{D}(0,6)$ 이루어져 있다. $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{PD}}$ 를 최소로 하는 점 P 의 좌표는?

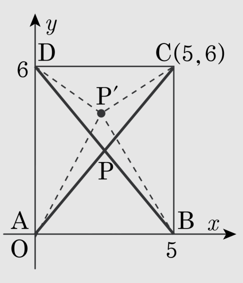


① $\left(\frac{5}{2},0\right)$　② $\left(\frac{5}{2},3\right)$　③ $(0,3)$

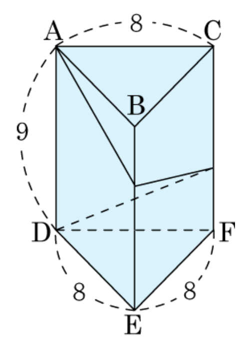
④ $(5,0)$　⑤ $(0,6)$

해설

그림에서 두 대각선 AC, BD 의 교점을 P 라 하고, 임의의 점P′ 을 잡으면 $\overline{\mathrm{P'}}\mathrm{A}+\overline{\mathrm{P'}}\mathrm{C} >= \overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PC}}$ $\overline{\mathrm{P'}}\mathrm{B}+\overline{\mathrm{P'}}\mathrm{D} >= \overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}$ $\therefore$ $\overline{\mathrm{P'}}\mathrm{A}+\overline{\mathrm{P'}}\mathrm{B}+\overline{\mathrm{P'}}\mathrm{C}+\overline{\mathrm{P'}}\mathrm{D}$ $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{PD}}$
즉, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{PD}}$ 를 최소로 하는 점 P 는$\overline{\mathrm{AC}}$ 와 $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 교점 $\left(\frac{5}{2},3\right)$ 이다.



25. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2 + 9^2} = \sqrt{576 + 81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$