1. 최대공약수가 $x+1$ 이고, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2 일 때, 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 합을 구하면?

① $2x^2+3x+1$　② x^2+3x+1　③ $2x^2+3x+2$
④ x^3+3x-2　⑤ x^2-x+1

해설

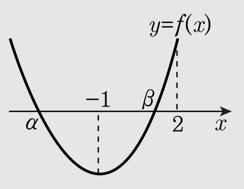
$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x-1)(x+2)$
$\therefore$ 두 다항식은 $(x+1)(x-1)$, $(x+1)(x+2)$ 이다.
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2+3x+1$

2. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-1<\beta<2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$ ② $-2<a<1$ ③ $0<a<2$
④ $1<a<2$ ⑤ $1<a<3$

해설

$f(x) = x^2+2ax+a^2-1$ 로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1)<0$, $f(2)>0$

(i) $f(-1)=1-2a+a^2-1<0$ 에서 $a^2-2a<0$, $a(a-2)<0$
$\therefore 0<a<2$

(ii) $f(2) = 4+4a+a^2-1>0$ 에서 $a^2+4a+3>0$, $(a+3)(a+1)>0$
$\therefore a<-3$, $a>-1$

(i), (ii) 에서 $0<a<2$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-3=m(x+2)$ 가 $1<x<2$에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y=x^2=2x-3\cdots\cdots ㉠ \\ y=m(x+2)\cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하면 직선 ㉡은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 교점의 x좌표가 1 과 2사이에 존재해야 하므로

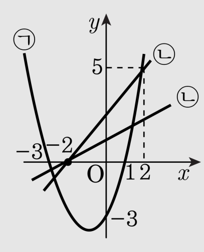
(i) 직선 ㉡이

점 $(1,\ 0)$을 지날 때

$3m=0 \quad \therefore m=0$

(ii) 직선 ㉡이 점 $(2,\ 5)$를 지날 때

$4m=5 \quad \therefore m=\frac{5}{4}$



(i), (ii)에서 $0<m<\frac{5}{4}$

따라서, 정수 m의 값은 1하나뿐이다.

4. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$ 이므로

$\frac{1}{i}+{\frac{1}{i}}^{2}+{\frac{1}{i}}^{3}+{\frac{1}{i}}^{4}$

$=\frac{1}{i}^{5}+{\frac{1}{i}}^{6}+{\frac{1}{i}}^{7}+{\frac{1}{i}}^{8}\cdots$

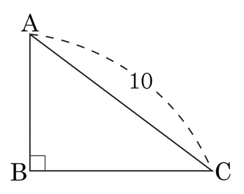
$=\frac{1}{i}+{\frac{1}{i}}^{2}+{\frac{1}{i}}^{3}+{\frac{1}{i}}^{4}$

$=-i-1+i+1=0$

$\therefore$ (준식) $=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+{\frac{1}{i}}^{2}$

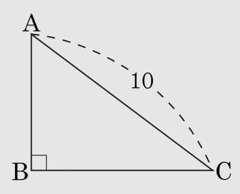
$=1-i-1=-i$

5. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



① 48 ② 40 ③ 32 ④ 18 ⑤ 12

해설



$\overline{\mathrm{AB}} = a, \overline{\mathrm{BC}} = b$

둘레의 길이가 24 이므로

$24 = a + b + 10$

$a + b = 14$

직각삼각형이므로,

$a^2 + b^2 = 10^2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\}$

$= \frac{1}{2}\left\{14^2 - 10^2\right\} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$

6. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

7. $y = x^2 + 2ax + a$ 의 최솟값을 M 이라고 할 때, M 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}$

해설

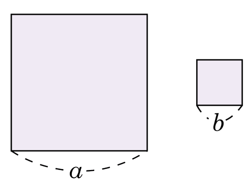
$y = x^2 + 2ax + a = (x+a)^2 - a^2 + a$

최솟값은 $-a^2 + a$ 이다.

즉, $M = -a^2 + a = -(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이다.

$\therefore a = \frac{1}{2}$ 일 때, M 은 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

8. 길이가 16인 철사로 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 a, b인 두 개의 정사각형을 만들었다. 이 두 정사각형의 넓이의 합이 10이다. 이 때, a, b를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식을 구하면? (단, x^2의 계수는 1이다.)



① $x^2-4x+3=0$
② $x^2-3x+4=0$
③ $x^2+3x-4=0$
④ $x^2+4x+2=0$
⑤ $x^2-2x-2=0$

해설

두 정사각형의 둘레의 합이 16이므로
$4(a+b)=16$에서 $a+b=4$
두 정사각형의 넓이의 합이 10이므로
$a^2+b^2=10$,
$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2=16-2ab=10$
따라서 $2ab=6$이고 $ab=3$
따라서 a, b를 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합이 4, 곱이 3이므로 $x^2-4x+3=0$

9. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a\cdots$(가)
(가)를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1,2,3,\cdots,9$의 9개이다.

10. 이차항의 계수가 모두 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가 $(x+1)(x-2)(x-3)$인 두 이차식을 구하면?

① $(x+1)(x-2)$, $(x-2)(x-3)$
② $(x+1)(x-2)(x-3)$, $(x-2)$
③ $(x+1)^2$, $(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x-3)$, $(x-2)(x-3)$
⑤ $(x+1)(x-2)$, $(x+1)(x-3)$

해설

두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수는 $(x-2)ab=(x+1)(x-2)(x-3)$
$a=x+1$, $b=x-3$ (또는 $a=x-3$, $b=x+1$)
따라서 두 다항식은 $(x-2)(x+1)$, $(x-2)(x-3)$

11. 이차부등식 $x^2 - 3x + 2 < 0$을 만족하는 모든 x 가 이차부등식 $x^2 - 2ax + a - 1 < 0$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$　　② $a > 1$　　③ $0 < a < 1$

④ $0 \le a \le 1$　　⑤ $a \ge 1$

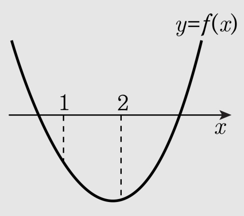
해설

$x^2 - 3x + 2 < 0$에서 $(x-1)(x-2) < 0$

$\therefore 1 < x < 2$

이차부등식 $x^2 - 2ax + a - 1 < 0$ 이 $1 < x < 2$에서 항상 성립해야하므로

$f(x) = x^2 - 2ax + a - 1$로 놓으면 다음 그림과 같이 $f(1) \le 0$, $f(2) \le 0$이어야 한다.



$f(1) = 1 - 2a + a - 1 \le 0$ 에서 $a \ge 0$ ⋯⋯ ㉠

$f(2) = 4 - 4a + a - 1 \le 0$ 에서 $a \ge 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a \ge 1$

12. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$

즉 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는

직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로

$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$

$$\begin{aligned} \therefore y_1 + y_2 + y_3 &= 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12 \\ &= 3 \cdot 2 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

13. 다음 중 그 값이 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{114}$ 의 값과 같은 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $i+i^3+i^5+i^7+i^9+i^{11}$

② $i+i^4+i^7+i^{10}+i^{13}+i^{16}$

③ $i^2+i^5+i^8+i^{11}+i^{14}+i^{17}$

④ $i^3+i^6+i^9+i^{12}+i^{15}+i^{18}$

⑤ $\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2+\frac{1}{i}^3+\frac{1}{i}^4+\frac{1}{i}^5+\frac{1}{i}^6$

해설

i^n 의 주기성을 묻는 문제이다.

$i=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$

이므로 곱에 대하여 주기가 4 인 규칙을 지닌다.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)\\ &\quad +\cdots+(i^{109}+i^{110}+i^{111}+i^{112})+i^{113}+i^{114}\\ &= (i-1-i+1)+(i-1-i+1)\\ &\quad +\cdots+(i-1-i+1)+i-1\\ &= i-1\end{aligned}$$

① (준식) $=(i-i+i-i)+i-i=0$

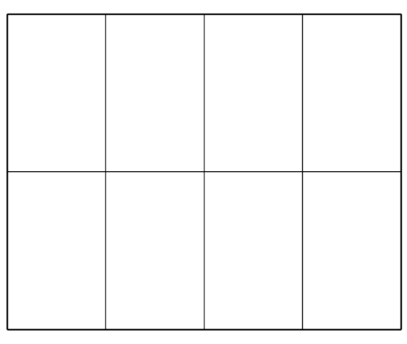
② (준식) $=(i+1-i-1)+i+1=i+1$

③ (준식) $=(-1+i+1-i)-1+i=-1+i$

④ (준식) $=(-i-1+i+1)-i-1=-i-1$

⑤ (준식) $=(-i-1+i+1)-i-1=-i-1$

14. 학교운동장에 길이가 $70\,\mathrm{m}$ 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 $80\,\mathrm{m}^2$ 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 $10\,\mathrm{m}$ 이하이다.)



① $16\,\mathrm{m}$ ② $17\,\mathrm{m}$ ③ $18\,\mathrm{m}$ ④ $19\,\mathrm{m}$ ⑤ $20\,\mathrm{m}$

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.
$3x + 5y = 70$
$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10,\ y = 8$
$\therefore$ 가로+세로$= 18$

15. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0 \text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$
$2-2xy=6,\ 4x+y=2$
연립하여 x 에 대해 정리하면
$2x^2-x-1=0$
$(x-1)(2x+1)=0$
$\therefore\ x=1(x>0),\ y=-2$

16. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$

이므로 $x = a$일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$를 가진다.

$\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$

따라서 m은 $a = 2$일 때 최댓값 0을 가진다.

17. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha^2+\frac{1}{\beta}$, $\beta^2+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식을 보기에서 고르면?

① $x^2-10x+3=0$ ② $x^2-10x+5=0$
③ $x^2-3x+3=0$ ④ $x^2-3x+5=0$
⑤ $x^2-5x+7=0$

해설
$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=3,\ \ \alpha\beta=1$
$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=10$
$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^2\beta^2+\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha\beta}=5$
$\therefore\ x^2-10x+5=0$

18. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > -\frac{1}{\beta}$

② $x < -\frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

③ $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$

④ $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$

⑤ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로

$a < 0$ 이다. 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 이고

이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$

양변에 a 를 곱하면

$a(x-\alpha)(x-\beta) > 0$

$ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta > 0$

$\therefore\ b = -a(\alpha+\beta),\ c = a\alpha\beta$

따라서 $cx^2 - bx + a > 0$ 에 대입하면

$a\alpha\beta x^2 + a(\alpha+\beta)x + a > 0$

$\alpha\beta x^2 + (\alpha+\beta)x + 1 < 0$

$(\alpha x+1)(\beta x+1) < 0$

$\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}\ (\because 0 < \alpha < \beta)$