1. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$= (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$
여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면
(준식) $= X(X+8)+a$
$= X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16$
따라서 $a=16$

2. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은 ?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
$= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$= a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를
각각 a, b, c라 하면 대각선의 길이는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 28$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 28^2 \cdots$ ㉠
또, 모든 모서리의 길이의 합은 176이므로
$4(a+b+c) = 176$
$\therefore\ a+b+c = 44 \cdots$ ㉡
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이므로
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉢
따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152이다.

3. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을구하면?

① 1　　② -1　　③ 3　　④ -4　　⑤ -3

해설

(i) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$

$f(1) = 1 + a + b = 0$

$\therefore\ b = -(a+1)$

(ii) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$

$= (x-1)^2 Q(x)$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$

$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0\ \ \therefore\ a = -4$

$b = -(a+1)$에서 $b = 3$

$\therefore a + b = -1$

4. 다항식 $f(x)$를 $x-3$, $x-4$로 나눈 나머지가 각각 $3, 2$이고, 다항식 $f(x+1)$을 x^2-5x+6으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(3)=3,\ f(4)=2$
$R(x)=ax+b$라 하면
$f(x+1)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$
$x=2$ 대입,
$f(3)=2a+b=3$
$x=3$ 대입,
$f(4)=3a+b=2$
$a=-1,\ b=5$
$R(x)=-x+5,$
$R(1)=-1+5=4$

5. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, x^2-y^2의 값은?

$$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2=4\times 3^n$$

① 3　② 4　③ 6　④ 7　⑤ 9

해설

$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2$
$=4\times 3^n$
$4\{(x+y)(x-y)\}^n=4\times 3^n$
$4(x^2-y^2)^n=4\times 3^n$
$\therefore\ x^2-y^2=3$

6. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$ 라 하면

$A + B = (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$

따라서, $G = x - 3$, $p = x + 3$, $q = x - 1$ 이다.

$\therefore\ A = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

$\quad B = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

7. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-5x-3$이고 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x-3$

해설

두 다항식을 A, B라고 하면
$A+B=(a+b)G$, $L=abG$,
즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.
$x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2)$
$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$
$\therefore\ G=x-3$

8. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots ㉠$, $yz-x=0 \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(3, 1, 3)$ 3 개

9. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

(준식) $=(-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}$

$=\{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}$

$=-1-1-1=-3$

10. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha+i)(\beta+i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) \circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$ ② $-i$ ③ i
④ $1+i$ ⑤ $\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$

해설

$(2+i) \circledcirc z = \{(2+i)+i\}(z+i)$
$= (2+2i)(z+i) = 1$

$z+i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$z = \frac{1}{2+2i} - i$

$= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i$

$= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

11. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}\times(-2)=1$

12. 조건 $x^2-2kx+k^2+2k+3=0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+2=2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha+2)=k^2+2k+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha=k-1$을 ㉡에 대입하면,
$(k-1)(k+1)=k^2+2k+3$
$\therefore\ k=-2$

13. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2 , 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

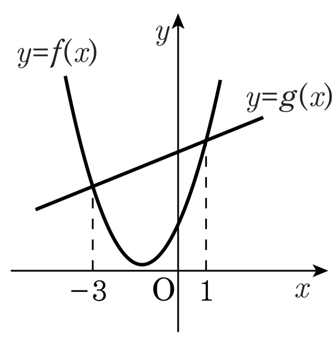
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고 조건에서
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$
$f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$
따라서 $f(2x+1)=0$ 의 근은 $\dfrac{\alpha-1}{2}$, $\dfrac{\beta-1}{2}$
이때 두 근의 합 $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$
$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0$

14. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8　　② -6　　③ -4　　④ 2　　⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a - c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

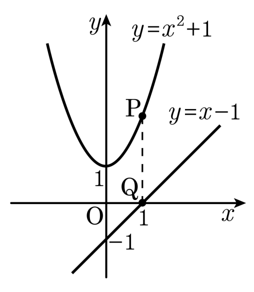
$2(x + 3)(x - 1) = 0$ 과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a - c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

15. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}} &= t^2 + 1 - (t - 1)\\ &= t^2 - t + 2\\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

16. 둘레의 길이가 24m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① $30\,\mathrm{cm}^2$　② $32\,\mathrm{cm}^2$　③ $34\,\mathrm{cm}^2$
④ $36\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $38\,\mathrm{cm}^2$

해설

가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$, 세로의 길이를 $(24-x)\,\mathrm{m}$, 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36-26) \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 $x=6$ 일 때 넓이의 최댓값은 $36\,\mathrm{m}^2$ 이다.

17. 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \ \alpha\beta\gamma=-1$이므로
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(2)=$
$9-4=5$

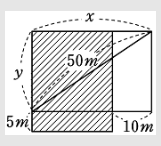
18. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답: ____ m

▷ 정답: 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

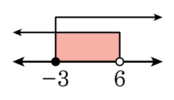
$(y-14)(y+30) = 0$

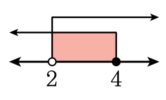
$\therefore\ y = 14,\ -30$

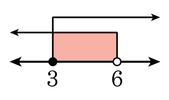
그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

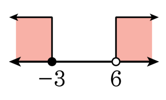
이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

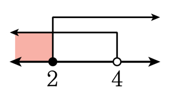
19. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<9 \\ 4x+1 \geq x-8 \end{cases}$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$\begin{cases} 2x-3<9 \rightarrow x<6 \\ 4x+1 \geq x-8 \rightarrow x \geq -3 \end{cases}$

$\therefore -3 \leq x < 6$

20. 연립부등식 $\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} \leq a$의 해가 $-2 \leq x < 1$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{7}{2}$　② 3　③ 1　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

연립부등식 $\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} \leq a$를

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} & \cdots ㉠ \\ \frac{5-x}{2} \leq a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

으로 바꾸어 연립부등식의 해를 구한다.

㉠을 풀면

$\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2}$, $4x+8 < 15-3x$, $7x < 7$

$\therefore\ x < 1 \cdots$ (ⅰ)

㉡을 풀면 $\frac{5-x}{2} \leq a$, $5-x \leq 2a$

$\therefore\ x \geq 5-2a \cdots$ (ⅱ)

(ⅰ), (ⅱ)를 모두 만족시키는 x의 범위는 $5-2a \leq x < 1$이다.

연립부등식의 해가 $-2 \leq x < 1$이므로 $5-2a = -2$

$\therefore\ a = \frac{7}{2}$

21. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$
② x는 모든 실수
③ $x \ne 3$인 모든 실수
④ $x = 3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \le 0$
$(x-3)^2 \le 0$
$\Rightarrow x = 3$

22. 부등식 $x^2 - 4|x| + 3 < 0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개
④ 3 개　⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - 4|x| + 3 < 0$에서 $|x|^2 - 4|x| + 3 < 0$

$(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$

$1 < |x| < 3$

따라서, 정수 $x = 2, -2$

23. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b>0$이 성립하기 위한 상수 a, b의 조건은?

① $a=5, b>5$ ② $a=10, b>5$ ③ $a=10, b<5$
④ $a=20, b>5$ ⑤ $a=20, b<5$

해설

$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b>0$
$x^2+(4y+10)x+4y^2+ay+5b>0$
이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
방정식 $x^2+(4y+10)x+4y^2+ay+5b=0$이 허근을 가져야 하므로
$\dfrac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+5b)<0$
$4y^2+20y+25-4y^2-ay-5b<0$
$(20-a)y+25-5b<0$
이 부등식이 모든 실수 y에 대하여 성립하려면
$20-a=0,\ 25-5b<0$
$\therefore a=20,\ b>5$

24. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$　　② $-7<x<-5$

③ $-7<x<5$　　④ $5<x<7$

⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로

$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$

$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$

$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ (가)

(가)를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면

$-4x^2-48x-140<0$

$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

25. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-4=0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근이 1과 2 사이에 있을 때, 상수 a의 범위는?

① $a>3$　　② $0<a<3$　　③ $a\geq\frac{1}{2}$
④ $a\geq 1$　　⑤ $-1<a<3$

해설

주어진 조건을 만족시키려면 $f(-1)>0, f(0)<0, f(1)<0, f(2)>0$ 이어야 한다.
따라서 $f(-1)=a+(a+1)-4>0$ 에서
$2a>3 \quad \therefore\ a>\frac{3}{2}\cdots$ ㉠
$f(2)=4a-2a-2-4>0$ 에서
$2a>6 \quad \therefore\ a>3\cdots$ ㉡
㉠,㉡을 모두 만족해야 하므로
구하는 a의 값의 범위는 $a>3$