1. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$

여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= X(X+8)+a \\
&= X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16
\end{aligned}
$$

따라서 $a=16$

2. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
$= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$= a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를
각각 a, b, c라 하면 대각선의 길이는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 28$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 28^2 \cdots$ ㉠
또, 모든 모서리의 길이의 합은 176이므로
$4(a+b+c) = 176$
$\therefore\ a+b+c = 44 \cdots$ ㉡
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이므로
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉢
따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152이다.

3. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을구하면?

① 1　② -1　③ 3　④ -4　⑤ -3

해설

(i) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$

$f(1) = 1 + a + b = 0$

$\therefore\ b = -(a+1)$

(ii) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$

$= (x-1)^2 Q(x)$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$

$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0$ $\therefore\ a = -4$

$b = -(a+1)$에서 $b = 3$

$\therefore a + b = -1$

4. 다항식 $f(x)$를 $x-3, x-4$로 나눈 나머지가 각각 $3, 2$이고, 다항식 $f(x+1)$을 x^2-5x+6으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(3)=3,\ f(4)=2$

$R(x)=ax+b$라 하면

$f(x+1)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$x=2$ 대입,

$f(3)=2a+b=3$

$x=3$ 대입,

$f(4)=3a+b=2$

$a=-1,\ b=5$

$R(x)=-x+5,$

$R(1)=-1+5=4$

5. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, $x^2 - y^2$의 값은?

$$[(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2 = 4 \times 3^n$$

① 3　　② 4　　③ 6　　④ 7　　⑤ 9

해설

$[(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2$

$= 4 \times 3^n$

$4\{(x+y)(x-y)\}^n = 4 \times 3^n$

$4(x^2 - y^2)^n = 4 \times 3^n$

$\therefore \; x^2 - y^2 = 3$

6. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면

$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.

$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$

$B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

7. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-5x-3$이고 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x-3$

해설

두 다항식을 $A,\ B$라고 하면

$A+B=(a+b)G,\ L=abG,$

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2)$

$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$

$\therefore\ G=x-3$

8. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \ \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \ \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1),\ (4,\ 2,\ 2),\ (3,\ 1,\ 3)$ 3개

9. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -3

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i\ ,$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\ &= \{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\ &= -1-1-1=-3\end{aligned}$$

10. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha+i)(\beta+i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i)\circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$ ② $-i$ ③ i

④ $1+i$ ⑤ $\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$

해설

$$(2+i)\circledcirc z = \left\{(2+i)+i\right\}(z+i)$$
$$= (2+2i)(z+i) = 1$$

$z+i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$$z = \frac{1}{2+2i} - i$$
$$= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i$$
$$= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$$

11. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$$

12. 조건 $x^2-2kx+k^2+2k+3=0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 α, $\alpha+2$ 라 하면

근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+2=2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha+2)=k^2+2k+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha=k-1$을 ㉡에 대입하면,

$(k-1)(k+1)=k^2+2k+3$

$\therefore\ k=-2$

13. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$이고 조건에서

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$f(2x+1)=0$에서

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

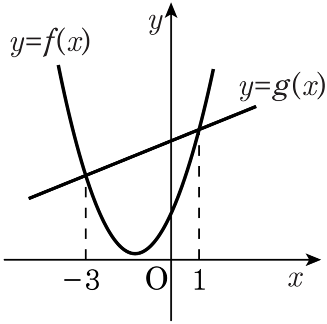
$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1)=0$ 의 근은 $\dfrac{\alpha-1}{2},\ \dfrac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$

$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0$

14. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a - c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

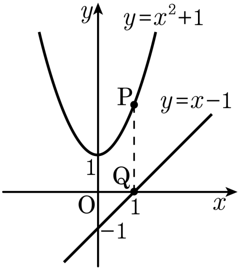
$2(x + 3)(x - 1) = 0$과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a - c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

15. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

16. 둘레의 길이가 24m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① $30\,\text{cm}^2$　② $32\,\text{cm}^2$　③ $34\,\text{cm}^2$

④ $36\,\text{cm}^2$　⑤ $38\,\text{cm}^2$

해설

가로의 길이를 x m , 세로의 길이를 $(24-x)$ m , 넓이를 $y\,\text{m}^2$ 라 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(12-x) \\
&= -x^2 + 12x \\
&= -(x^2 - 12x + 36 - 26) \\
&= -(x-6)^2 + 36
\end{aligned}
$$

따라서 $x = 6$ 일 때 넓이의 최댓값은 $36\,\text{m}^2$ 이다.

17. 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \ \alpha\beta\gamma=-1$이므로
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(2)=$
$9-4=5$

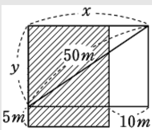
18. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore \ x = 2y + 20 \ \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

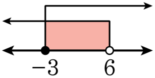
$(y-14)(y+30) = 0$

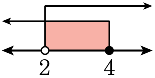
$\therefore \ y = 14, \ -30$

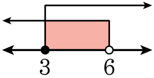
그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

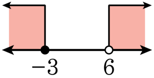
이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

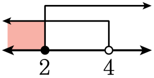
19. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<9 \\ 4x+1 \ge x-8 \end{cases}$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$$\begin{cases} 2x-3<9 \rightarrow x<6 \\ 4x+1 \ge x-8 \rightarrow x \ge -3 \end{cases}$$

$\therefore -3 \le x < 6$

20. 연립부등식 $\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} \le a$ 의 해가 $-2 \le x < 1$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{7}{2}$　② 3　③ 1　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

연립부등식 $\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} \le a$ 를

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} & \cdots ㉠ \\ \frac{5-x}{2} \le a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

으로 바꾸어 연립부등식의 해를 구한다.

㉠을 풀면

$\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2}$, $4x+8 < 15-3x$, $7x < 7$

$\therefore\ x < 1 \ \cdots$ (ⅰ)

㉡을 풀면 $\frac{5-x}{2} \le a$, $5-x \le 2a$

$\therefore\ x \ge 5-2a \ \cdots$ (ⅱ)

(ⅰ), (ⅱ)를 모두 만족시키는 x의 범위는 $5-2a \le x < 1$이다.

연립부등식의 해가 $-2 \le x < 1$ 이므로 $5-2a = -2$

$\therefore\ a = \frac{7}{2}$

21. 이차부등식 $x^2-6x+9\le 0$의 해를 구하면?

① $x\ge 3$ 또는 $x\le -3$

② x는 모든 실수

③ $x\ne 3$인 모든 실수

④ $x=3$

⑤ 해가 없다

해설

$x^2-6x+9\le 0$

$(x-3)^2\le 0$

$\Rightarrow x=3$

22. 부등식 $x^2 - 4|x| + 3 < 0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개

④ 3 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - 4|x| + 3 < 0$에서 $|x|^2 - 4|x| + 3 < 0$

$(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$

$1 < |x| < 3$

따라서, 정수 $x = \; 2, \; -2$

23. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b>0$이 성립하기 위한 상수 a, b의 조건은?

① $a=5, b>5$ ② $a=10, b>5$ ③ $a=10, b<5$

④ $a=20, b>5$ ⑤ $a=20, b<5$

해설

$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b>0$

$x^2+(4y+10)x+4y^2+ay+5b>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

방정식 $x^2+(4y+10)x+4y^2+ay+5b=0$이 허근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+5b)<0$$

$4y^2+20y+25-4y^2-ay-5b<0$

$(20-a)y+25-5b<0$

이 부등식이 모든 실수 y에 대하여 성립하려면

$20-a=0,\ 25-5b<0$

$\therefore a=20,\ b>5$

24. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$
② $-7<x<-5$
③ $-7<x<5$
④ $5<x<7$
⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로

$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$

$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$

$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ ㈎

㈎를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면

$-4x^2-48x-140<0$

$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

25. 이차방정식 $ax^2 - (a+1)x - 4 = 0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근이 1과 2 사이에 있을 때, 상수 a의 범위는?

① $a > 3$ ② $0 < a < 3$ ③ $a \geq \frac{1}{2}$

④ $a \geq 1$ ⑤ $-1 < a < 3$

해설

주어진 조건을 만족시키려면 $f(-1) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(2) > 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(-1) = a + (a+1) - 4 > 0$ 에서

$2a > 3 \quad \therefore \ a > \frac{3}{2} \cdots$ ㉠

$f(2) = 4a - 2a - 2 - 4 > 0$ 에서

$2a > 6 \quad \therefore \ a > 3 \cdots$ ㉡

㉠,㉡을 모두 만족해야 하므로

구하는 a의 값의 범위는 $a > 3$