

1. 수직선 위의 두 점 A(-2), B(4)에 대하여 P(-5)일 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여

$\overline{PA} + \overline{PB}$ 를 구한다.

A(-2), B(4), P(-5)에 대하여

$\overline{PA} = |-5 - (-2)| = 3$, $\overline{PB} = |-5 - 4| = 9$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = 3 + 9 = 12$

2. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는 5이고 점 $C(a+b)$ 의 좌표를 -1 이라 할 때, 점 $D(a-b)$ 의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$ 일때, $A(a), B(b)$ 사이의 거리는 $a - b$ 이므로, $a - b = 5$
따라서 $D(a - b)$ 의 좌표는 5

3. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$A(\sqrt{3}-1, 1-\sqrt{2}), B(\sqrt{3}, 1+\sqrt{2})$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2+(1-\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{1+8}=3\end{aligned}$$

4. 두 점 A(a , 1), B(4, -3) 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$ 일 때, 실수 a 의 값들의 합은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-a)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 8a + 32 = 80, a^2 - 8a - 48 = 0$$

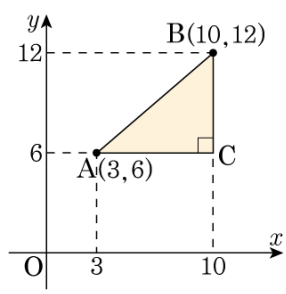
$$(a-12)(a+4) = 0$$

$$\therefore a = 12 \text{ 또는 } a = -4$$

$$\text{따라서 구하는 값은 } 12 - 4 = 8$$

5. 다음 좌표 평면 위의 두 점 A(3,6), B(10,12) 사이의 거리를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 구하여라.

$$\begin{aligned} &(\text{두 점 A, B 사이의 거리}) = \overline{AB} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= (10-3)^2 + (12-6)^2 \\ &= 49 + 36 \\ &= 85 \\ \therefore \overline{AB} &= \square \end{aligned}$$



- ① $3\sqrt{5}$ ② 6 ③ $6\sqrt{7}$ ④ 8 ⑤ $\sqrt{85}$

해설

$$\begin{aligned} &(\text{두 점 A, B 사이의 거리}) = \overline{AB} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= (10-3)^2 + (12-6)^2 \\ &= 49 + 36 = 85 \end{aligned}$$

6. 점 A(-1, 2), B(2, -2) 에 대하여 다음 중 $\overline{PA} = \overline{AB}$ 를 만족시키는 점 P 의 좌표가 될 수 없는 것은?

① (3, 5)

② (-1, 7)

③ (4, 2)

④ (2, 3)

⑤ (-4, 6)

해설

$$\overline{AB}^2 = (2 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 25$$

① P(3, 5) 일 때,

$$\overline{PA}^2 = (-1 - 3)^2 + (2 - 5)^2 = 25$$

② P(-1, 7) 일 때,

$$\overline{PA}^2 = (-1 + 1)^2 + (2 - 7)^2 = 25$$

③ P(4, 2) 일 때,

$$\overline{PA}^2 = (-1 - 4)^2 + (2 - 2)^2 = 25$$

④ P(2, 3) 일 때,

$$\overline{PA}^2 = (-1 - 2)^2 + (2 - 3)^2 = 10$$

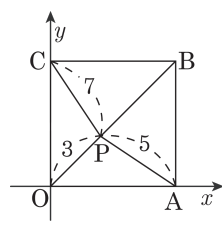
⑤ P(-4, 6) 일 때,

$$\overline{PA}^2 = (-1 + 4)^2 + (2 - 6)^2 = 25$$

따라서 ④는 $\overline{PA} = \overline{AB}$ 를 만족시키지 않는다.

7. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $OP = 3$, $AP = 5$, $CP = 7$ 일 때 선분 PB의 길이는?

- ① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$
 ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$



해설

정사각형의 한 변의 길이를 a , 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \dots \textcircled{A} \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \dots \textcircled{B} \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \dots \textcircled{C} \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$PB = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}$ 이다.

$\textcircled{B} + \textcircled{C} - \textcircled{A}$ 에서

$$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$$

따라서 $PB = \sqrt{65}$

8. 좌표평면에서 점 A(2, 1) 에 이르는 거리가 각각 $\sqrt{5}$ 인 두 점이 x 축 위에 있다. 이 두 점 사이의 거리는?

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설

x 축 위의 점을 P(x , 0) 이라 하면 $\overline{AP} = \sqrt{5}$ 이므로 $\overline{AP}^2 = (x-2)^2 + (-1)^2 = 5$, $x^2 - 4x = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 4$

따라서 x 축 위의 두 점은 (0, 0), (4, 0) 이므로 두 점사이의 거리는 4 이다

9. 두 점 A(-3, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

① (-3, 0)

② (1, 0)

③ (2, 0)

④ (-1, 0)

⑤ (5, 0)

해설

x 축 위의 점을 P(x, 0)라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, P(2, 0)

10. 두 점 A(4, -2), B(3, 5)로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

- ① P(-2, -1) ② P(-1, 0) ③ P(0, 1)
④ P(1, 2) ⑤ P(2, 3)

해설

점 P의 좌표를 P(0, b)라고 하면

$$\overline{PA} = \sqrt{(0-4)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{b^2 + 4b + 20}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{b^2 - 10b + 34}$$

이 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$b^2 + 4b + 20 = b^2 - 10b + 34$$

$$14b = 14$$

$$\therefore b = 1$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(0, 1)

11. 직선 $y = 2x$ 위에 있고 점 $A(2, 0)$, $B(3, 1)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 $P(\alpha, \beta)$ 라고 할 때, $\alpha\beta$ 를 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $P(\alpha, 2\alpha)$ 라 하면

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(\alpha - 2)^2 + (2\alpha)^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2$$

$$-4\alpha + 4 = -6\alpha - 4\alpha + 10$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2$$

12. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

- ① (-3, -7) ② (-2, -5) ③ (3, 5)
④ (2, 3) ⑤ (2, 5)

해설

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-4)^2 + (b+3)^2$$

정리하면 $12a - 8b = 20$

$$\therefore 3a - 2b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또, P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$$b = 2a - 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

13. 세 점 A(1, 2), B(3, -2), C(-5, -1) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 이등변 삼각형

② 예각삼각형

③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{65}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1+5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ 에서}$$

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

14. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{1}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

15. 세 점 $A(2, -3)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 2)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① 정삼각형
- ② $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형
- ③ $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형
- ④ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
- ⑤ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 26 = \overline{AC}^2$ 이므로
 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

16. 세 점 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

- ① (2, -1)
- ② (2, -2)
- ③ (3, -2)
- ④ (2, 2)
- ⑤ (1, -2)

해설

외심의 좌표를 $O(a, b)$ 라 하면 $\overline{OA} = \overline{OB}$
즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로
 $(a - 6)^2 + (b - 1)^2 = (a + 1)^2 + (b - 2)^2$
 $\therefore 7a - b = 16 \cdots \textcircled{1}$
 $\overline{OA} = \overline{OC}$
즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로
 $(a - 6)^2 + (b - 1)^2 = (a - 2)^2 + (b - 3)^2$
 $\therefore 2a - b = 6 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 2, b = -2$
 $\therefore O(2, -2)$

17. $\triangle ABC$ 에서 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P(a , b)라 하면

$$(1) \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 \dots\dots\textcircled{A}$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 \dots\dots\textcircled{B}$$

①, ②를 각각 전개하여 정리하면

$$7a - b - 16 = 0, \quad 2a - b - 6 = 0$$

연립하여 풀면 $a = 2, b = -2$

따라서 외심은 (2, -2)이다.

$$(2) \overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$$

$$\therefore PA = 5$$

18. 세 꼭짓점이 A(1, 3), B(p , 3), C(1, q) 인 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표가 (2, 1)일 때 pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = -3$

해설

$$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2 \text{에서 } (p-2)^2 = 1$$

$$\therefore p = 1, 3$$

그런데 $p = 1$ 일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1 \therefore p = 3$

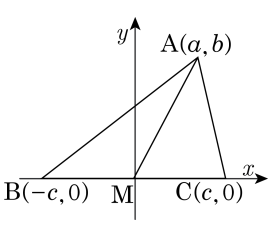
$$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2 \text{에서 } (q-1)^2 = 4$$

$$\therefore q = 3, -1$$

그런데 $q = 3$ 일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$

$$\therefore pq = 3 \times (-1) = -3$$

19. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x 축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 라 하면
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (a + c)^2 + b^2 + (a - c)^2 + b^2 =$ (가)이고,
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$
 따라서 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 =$ (나)
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ (다) $(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

위

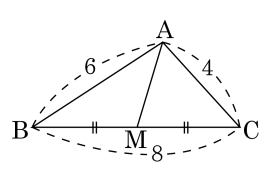
의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, 1$
- ② $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 1$
- ③ $2(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 2$
- ④ $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 2$
- ⑤ $3(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 3$

해설

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이므로
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
 $= \{(-c - a)^2 + (0 - b)^2\} + \{(c - a)^2 + (0 - b)^2\}$
 $= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2)$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$ 이므로
 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

20. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로
 $6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$
 $36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
 $\therefore \overline{AM}^2 = 10$

21. 좌표평면 위의 두 점 A(3,2) , B(5,4) 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 PA + PB 의 최솟값은?

- ① 6
- ② $\sqrt{37}$
- ③ $\sqrt{38}$
- ④ $\sqrt{39}$
- ⑤ $\sqrt{40}$

해설

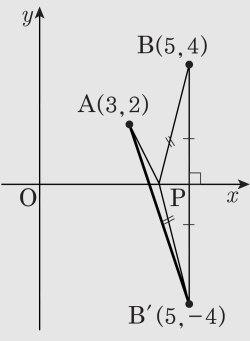
다음 그림과 같이 점 B(5, 4) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'(5,-4) 라 하면

$\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



22. 좌표평면 위의 두 점 A(7, 4), B(8, 6) 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x 좌표를 a 라 할 때, $5a$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

A(7, 4)를 $y = x$ 에 대칭이동한 점 C(4, 7)에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소인 점 P는

선분 BC와 직선 $y = x$ 의 교점이다.

$$y = -\frac{1}{4}x + 8 \text{와 } y = x \text{의 교점은 } \left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$$

$$\therefore 5a = 32$$

23. 3km 떨어진 두 마을 ㄱ, ㄴ이 있다. ㄱ마을에는 100명의 학생이, ㄴ마을에는 50명의 학생이 있다. ㄱ, ㄴ 두 마을 사이에 학교를 세울 때 통학거리의 합이 최소가 되려면 어디에 학교를 세워야 하는가?

- ① ㄱ마을
② ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 1km지점
③ 가운데
④ ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 2km지점
⑤ ㄴ마을

해설

ㄱ마을에서 x km 떨어진 곳에 학교를 세운다면 ㄴ마을 으로부터는 $(3-x)$ km 떨어져 있다. 통학거리의 합 S 는 $S = 100x + 50(3-x) = 150 + 50x$
 $x \geq 0$ 이므로 $x = 0$ 일 때 S 는 최소가 된다. 즉, ㄱ마을에 학교를 세우면 된다.

24. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m, 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

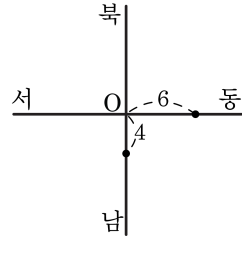
▶ 답: m

▶ 정답 : 30m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

25. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



- ① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
 ④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 $A(6, 0)$, $B(0, -4)$ 이고 t 시간 후의 A,B 의 좌표는 $A(6 - 4t, 0)$, $B(0, -4 + 2t)$ 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6 - 4t)^2 + (-4 + 2t)^2} = \sqrt{20t^2 - 64t + 52} = \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52} = \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$ 이므로 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. $\therefore$ 출발 후 1.6 시간 후이다.