1. 자연수 n에 대해 $x=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n+\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right\}^n$$

$$=\left(\frac{2}{2i}\right)^n+\left(\frac{2}{-2i}\right)^n$$

$$=\left(\frac{1}{i}\right)^n+\left(-\frac{1}{i}\right)^n=(-i)^n+i^n$$

i^n 은 $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n=4k$ 이면 $x=1+1=2$

(ii) $n=4k+1$ 이면 $x=-i+i=0$

(iii) $n=4k+2$ 이면 $x=-1-1=-2$

(iv) $n=4k+3$ 이면 $x=i-i=0$

$\therefore\ x=2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

2. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개

④ 4개　⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,
$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면
$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면
$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면
$i^{-n} = 1$
$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$
$\therefore\ z$는 3개다.

3. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i, \frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\frac{1-i}{1+i})+f(\frac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

4. 복소수 $z=a+bi$ $(a, b$: 실수$)$에 대하여 $<z>=b+ai$로 나타낸다. $z=\frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5<z>^4$의 값을 구하면?

① $3+4i$ ② $4+3i$ ③ $5+4i$
④ $5+3i$ ⑤ $4+5i$

해설

$z<z>=(a+bi)(b+ai)=(a^2+b^2)i$

$z=\frac{4+3i}{5}$ 이므로

$z<z>=\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}i=i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5z^5<z>^4 &= 5z(z<z>)^4 \\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4 \\ &= 4+3i\end{aligned}$$

5. 양의 실수 a, b에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i는 허수단위) 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3+i$ ② $2+3i$ ③ $5-2i$
④ $1-3i$ ⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A \ (a>0,\ b>0)$
① $a+b=-3,\ a-b=1$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$ (부적당)
② $a+b=2,\ a-b=3$
$\therefore\ a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2}$ (부적당)
③ $a+b=5,\ a-b=-2$
$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2}$ (양의 실수)
④ $a+b=1,\ a-b=-3$
$\therefore\ a=-1,\ b=2$ (부적당)
⑤ $a+b=-4,\ a-b=-2$
$\therefore\ a=-3,\ b=-1$ (부적당)

6. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a, b 는 실수)일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i$,

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2, \quad b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60,\ a=-15$

$\therefore\ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$