

1. 자연수 n 에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x 가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$

② $-2i$

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} x &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 \right\}^n \\ &= \left(\frac{2}{2i} \right)^n + \left(\frac{2}{-2i} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^n + \left(-\frac{1}{i} \right)^n = (-i)^n + i^n \end{aligned}$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k + 1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k + 2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k + 3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore x = 2, 0, -2$

따라서, x 가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

2. 정수 n 에 대해 $z = i^n + i^{-n}$, $i = \sqrt{-1}$ 을 만족하는 z 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1 ,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore z$ 는 3개다.

3. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = -i, \frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$= f(-i) + f(i)$$

$$= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$$

$$= i^{98} + (-i)^{98}$$

$$= i^2 + i^2$$

$$= -2$$

4. 복소수 $z = a + bi$ (a, b : 실수)에 대하여 $\langle z \rangle = b + ai$ 로 나타낸다.

$z = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 < z \rangle^4$ 의 값을 구하면?

① $3 + 4i$

② $4 + 3i$

③ $5 + 4i$

④ $5 + 3i$

⑤ $4 + 5i$

해설

$$z \langle z \rangle = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$$

$$z = \frac{4+3i}{5} \text{ 이므로}$$

$$z \langle z \rangle = \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$$

$$\begin{aligned} \therefore 5z^5 \langle z \rangle^4 &= 5z(z \langle z \rangle)^4 \\ &= 5 \left(\frac{4+3i}{5} \right) (i)^4 \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

5. 양의 실수 a, b 에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i 는 허수단위)의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3 + i$

② $2 + 3i$

③ $5 - 2i$

④ $1 - 3i$

⑤ $-4 - 2i$

해설

$$z = (a+b) + (a-b)i \in A \quad (a > 0, b > 0)$$

① $a+b = -3, a-b = 1$

$$\therefore a = -1, b = -2 \text{ (부적당)}$$

② $a+b = 2, a-b = 3$

$$\therefore a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2} \text{ (부적당)}$$

③ $a+b = 5, a-b = -2$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{7}{2} \text{ (양의 실수)}$$

④ $a+b = 1, a-b = -3$

$$\therefore a = -1, b = 2 \text{ (부적당)}$$

⑤ $a+b = -4, a-b = -2$

$$\therefore a = -3, b = -1 \text{ (부적당)}$$

6. 복소수 z 가 $z + |z| = 2 + 8i$ 를 만족시킬 때, $|z|^2$ 의 값은? (단, $z = a + bi$ (a, b 는 실수)일 때, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.)

① 68

② 100

③ 169

④ 208

⑤ 289

해설

$z = a + bi$ 라 놓자.

$$z + |z| = 2 + 8i,$$

$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i$$

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2, \quad b = 8$$

$$a + \sqrt{a^2 + 64} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a \text{ 양변제곱하면,}$$

$$a^2 + 64 = (2 - a)^2 = a^2 - 4a + 4$$

$$4a = -60, \quad a = -15$$

$$\therefore |z|^2 = a^2 + b^2 = 225 + 64 = 289$$