1. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x + 1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$
② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$
④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$
$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$
$= x(2x + 1)^2 + 1$

$2x + 1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

2. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a + b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a = 0,\ b = 0,\ c = -1$이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$를 $x^2 + x + 1$로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{rl}
 & x+(a-1) \\ \cline{2-2}
x^2+x+1 \big) & x^3+ax^2+2x+b \\
- & x^3+\ x^2+\ \ x \\ \cline{2-2}
 & (a-1)x^2+\ \ x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\ \cline{2-2}
 & (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2 - a = 2,\ b - a + 1 = 1$
$a = 0,\ b = 0$

3. x^8 을 $x+\frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$x^8 = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

$x=-\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $R=\frac{1}{2^8}$

$x^8 = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$

$x^8-\frac{1}{2^8} = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=Q(x)$

$\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{16}$

4. $x^2 + xy - 2y^2 - 2x - y + 1$을 인수분해하면?

① $(x+y-1)(x+2y-1)$
② $(x-y-1)(x+2y-1)$
③ $(x-y+1)(x+2y-1)$
④ $(x-y-1)(x+2y+1)$
⑤ $(x+y+1)(x+2y-1)$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$x^2 + (y-2)x - 2y^2 - y + 1$

$= \{x - (y+1)\}\{x + (2y-1)\}$

$= (x-y-1)(x+2y-1)$

5. 세 다항식 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x^2+3x-2$, $h(x)=x^2+mx+8$ 의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m=6$

해설

$f(x)=(x+2)(x-1)$
$g(x)=(x+2)(2x-1)$ 이므로
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$
이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로
$h(-2)=4-2m+8=0$
$\therefore\ m=6$

6. 등식 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오 (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면

$a(1-i)+b(1+i)=-10$, $(a+b)+(b-a)i=-10$

$\therefore a+b=-10$, $b-a=0$

7. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수) 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

ㄱ $f(z) \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 라 하면

$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\ \bar{w}$

$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

8. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로
$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore\ a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x-3)(x-4) = 0$
그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$
$\therefore\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 28$

9. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

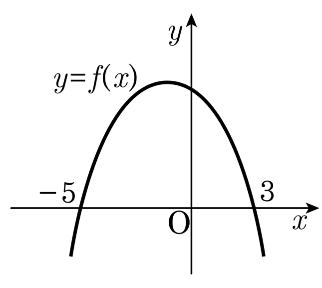
▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

10. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right) = \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

11. 이차함수 $y = 3x^2 + bx + c$ 가 $x = 1$일 때 최솟값 3을 가질 때, 상수 b, c의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답 : $b = -6$

▷ 정답 : $c = 6$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 3) 이므로
$y = 3(x-1)^2 + 3$ 을 전개하면 $y = 3x^2 - 6x + 6$
따라서 $b = -6, c = 6$ 이다.

12. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

13. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$

$(x+3)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}$

$= \sqrt{8+4\sqrt{3}} + \sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8+2\sqrt{12}} + \sqrt{8-2\sqrt{12}}$

$= (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$

14. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2+2x+k=0$, $x^2+kx+2=0$이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면
$\alpha^2+2\alpha+k=0$ 이고 $\alpha^2+k\alpha+2=0$ 이므로
$\alpha^2+2\alpha+k=\alpha^2+k\alpha+2$
$(2-k)\alpha+(k-2)=0$
따라서 $\alpha=1$ 이고
$1+2+k=0$ 이므로 $k=-3$

15. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c는 실수이다)

보기

㉠ $a > b$이면 $ac > bc$

㉡ $a > b$이면 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$

㉢ $a > b$이면 $\frac{c^2}{a} > \frac{c^2}{b}$

㉣ $a > b$이면 $a^2 > b^2$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠의 반례 : $a > b$이고 $c = 0$인 모든 실수 (거짓)

㉡. $a > b$이면 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$(참)

㉢의 반례 : $a > b$이고 $c = 0$인 모든 실수 (거짓)

㉣. $a > b$이고 $|a| < |b|$인 모든 실수 (거짓)

16. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-3>-x+9 \\ 5x<4x+a \end{cases}$ 를 만족하는 자연수가 2개일 때, a의 값의 범위는?

① $3<a\le 4$　② $3<a<4$　③ $4\le a<5$
④ $4<a\le 5$　⑤ $5<a\le 6$

해설

$3x-3>-x+9,\ \ x>3$
$5x<4x+a,\ \ \ x<a$
$\therefore\ \ 3<x<a$
만족하는 자연수가 2개, 즉 4, 5 이므로 $5<a\le 6$

17. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, 이차부등식$cx^2 - bx + a > 0$의 해는?(단,$\alpha > 0$이다.)

① $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$
② $-\beta < x < -\alpha$
③ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$
④ $x > \frac{1}{\alpha},\ x < \frac{1}{\beta}$
⑤ $x > -\frac{1}{\beta},\ x < -\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $\alpha < x < \beta$이므로

$a < 0,\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a > 0$

에서 $a < 0$이므로 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2 - \frac{b}{a}x + 1 < 0$

$\therefore \alpha\beta x^2 + (\alpha + \beta)x + 1 < 0$

$\therefore (\alpha x + 1)(\beta x + 1) < 0$이고

$0 < \alpha < \beta$에서 $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$이므로

$-\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{\beta}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$

18. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

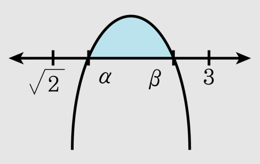
ㄱ. $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$　　ㄴ. $ac > 0$

ㄷ. $4a + c < 2b$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이
$a < 0,\ \sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



ㄱ. $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

ㄴ. $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

ㄷ. $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

19. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$ 의 값은?

① $x > -1$　　② $-4 < x < -1$　　③ $0 < x < 4$

④ $1 < x < 4$　　⑤ $-4 < x < 3$

해설

$x^2+3x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x+4)<0$
$\Rightarrow -4 < x < 1$

$x^2-2x-3>0 \Rightarrow (x+1)(x-3)>0$
$\Rightarrow x < -1$ 또는 $x > 3$

$\therefore$ 공통부분을 구하면 $-4 < x < -1$

20. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ $b^2 - 4ac > 0$ ㄴ $a + c < b$

ㄷ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.
ㄴ주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.