1. 다항식 $f(x)=4x^3+ax^2+x+1$을 $x+\frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x)=2x^2-x,\ R=1$

② $Q(x)=2x^2+x,\ R=1$

③ $Q(x)=2x^2-2x,\ R=1$

④ $Q(x)=4x^2-2x,\ R=\frac{1}{2}$

⑤ $Q(x)=4x^2+2x,\ R=\frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=1=\frac{a}{4}\therefore a=4$

따라서 $f(x)=4x^3+4x^2+x+1$

$=x(4x^2+4x+1)+1$

$=x(2x+1)^2+1$

$2x+1$로 나누면 $Q(x)=2x^2+x,\ R=1$

2. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$이 x에 대한 항등식일 때, $a + b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a = 0,\ b = 0,\ c = -1$이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$를 $x^2 + x + 1$로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{r l}
 & x+(a-1) \\
x^2+x+1 \,\big)\, & x^3+ax^2+ \qquad 2x+b \\
- & x^3+\ x^2+ \qquad\ \ x \\
 & (a-1)x^2+ \qquad x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\
 & \qquad (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2 - a = 2,\ b - a + 1 = 1$
$a = 0,\ b = 0$

3. x^8 을 $x+\frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

$x=-\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $R=\frac{1}{2^8}$

$x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$

$x^8-\frac{1}{2^8}=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=Q(x)$

$\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{16}$

4. $x^2 + xy - 2y^2 - 2x - y + 1$을 인수분해하면?

① $(x+y-1)(x+2y-1)$
② $(x-y-1)(x+2y-1)$
③ $(x-y+1)(x+2y-1)$
④ $(x-y-1)(x+2y+1)$
⑤ $(x+y+1)(x+2y-1)$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$x^2 + (y-2)x - 2y^2 - y + 1$

$= \{x - (y+1)\}\{x + (2y-1)\}$

$= (x-y-1)(x+2y-1)$

5. 세 다항식 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x^2+3x-2$, $h(x)=x^2+mx+8$의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m=6$

해설

$f(x)=(x+2)(x-1)$
$g(x)=(x+2)(2x-1)$이므로
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$
이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로
$h(-2)=4-2m+8=0$
$\therefore\ m=6$

6. 등식 $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오

(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면

$a(1-i)+b(1+i)=-10,\ (a+b)+(b-a)i=-10$

$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

7. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (w 는 복소수)

보기

ㄱ. $f(z) \geqq 0$

ㄴ. $f(z+w) = f(z) + f(w)$

ㄷ. $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ　　⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ. $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

ㄴ. $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$

ㄷ. $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\,\bar{w}$

$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

8. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 $3,\ b$일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore\ a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x-3)(x-4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$\therefore\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 28$

9. A, B두 사람이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3\pm\sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

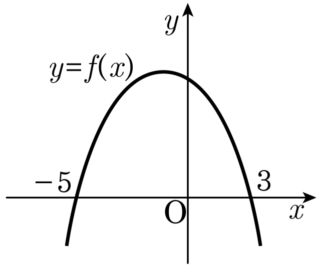
▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a}=-4\cdot 7=-28,\ c=-28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a}=(-3+\sqrt{2}i)+(-3-\sqrt{2}i)=-6,\ b=6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2+6ax-28a=0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

10. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)\ (a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

11. 이차함수 $y = 3x^2 + bx + c$ 가 $x = 1$ 일 때 최솟값 3을 가질 때, 상수 b, c의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = -6$

▷ 정답 : $c = 6$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 3)$ 이므로
$y = 3(x-1)^2 + 3$ 을 전개하면 $y = 3x^2 - 6x + 6$
따라서 $b = -6, c = 6$ 이다.

12. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

13. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$

$(x + 3)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$

$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}$

$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$

$= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$

14. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2+2x+k=0$, $x^2+kx+2=0$이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면
$\alpha^2+2\alpha+k=0$ 이고 $\alpha^2+k\alpha+2=0$ 이므로
$\alpha^2+2\alpha+k=\alpha^2+k\alpha+2$
$(2-k)\alpha+(k-2)=0$
따라서 $\alpha=1$ 이고
$1+2+k=0$ 이므로 $k=-3$

15. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c는 실수이다)

보기

㉠ $a > b$이면 $ac > bc$

㉡ $a > b$이면 $\dfrac{a}{c^2} > \dfrac{b}{c^2}$

㉢ $a > b$이면 $\dfrac{c^2}{a} > \dfrac{c^2}{b}$

㉣ $a > b$이면 $a^2 > b^2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠의 반례 : $a > b$이고 $c = 0$인 모든 실수 (거짓)

㉡. $a > b$이면 $\dfrac{a}{c^2} > \dfrac{b}{c^2}$(참)

㉢의 반례 : $a > b$이고 $c = 0$인 모든 실수 (거짓)

㉣. $a > b$이고 $|a| < |b|$인 모든 실수 (거짓)

16. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 3 > -x + 9 \\ 5x < 4x + a \end{cases}$ 를 만족하는 자연수가 2개일 때, a 의 값의 범위는?

① $3 < a \le 4$　② $3 < a < 4$　③ $4 \le a < 5$

④ $4 < a \le 5$　⑤ $5 < a \le 6$

해설

$3x - 3 > -x + 9,\ \ x > 3$

$5x < 4x + a,\ \ \ x < a$

$\therefore\ \ 3 < x < a$

만족하는 자연수가 2개, 즉 4, 5 이므로 $5 < a \le 6$

17. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 이차부등식$cx^2-bx+a>0$의 해는?(단,$\alpha>0$이다.)

① $-\dfrac{1}{\alpha}<x<-\dfrac{1}{\beta}$ ② $-\beta<x<-\alpha$

③ $\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}$ ④ $x>\dfrac{1}{\alpha},\ x<\dfrac{1}{\beta}$

⑤ $x>-\dfrac{1}{\beta},\ x<-\dfrac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$a<0,\ \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$cx^2-bx+a>0$

에서 $a<0$이므로 양변을 a로 나누면

$\dfrac{c}{a}x^2-\dfrac{b}{a}x+1<0$

$\therefore\ \alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$\therefore\ (\alpha x+1)(\beta x+1)<0$이고

$0<\alpha<\beta$에서 $\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$이므로

$-\dfrac{1}{\alpha}<-\dfrac{1}{\beta}$

$\therefore\ -\dfrac{1}{\alpha}<x<-\dfrac{1}{\beta}$

18. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

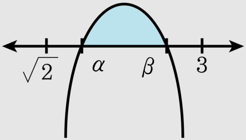
ㄴ. $ac > 0$

ㄷ. $4a + c < 2b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이
$a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



ㄱ. $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

ㄴ. $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

ㄷ. $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

19. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$ 의 값은?

① $x>-1$ ② $-4<x<-1$ ③ $0<x<4$

④ $1<x<4$ ⑤ $-4<x<3$

해설

$$x^2+3x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x+4)<0$$
$$\Rightarrow -4<x<1$$

$$x^2-2x-3>0 \Rightarrow (x+1)(x-3)>0$$
$$\Rightarrow x<-1 \text{ 또는 } x>3$$

$\therefore$ 공통부분을 구하면 $-4<x<-1$

20. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ $b^2 - 4ac > 0$

ㄴ $a + c < b$

ㄷ $a < 1$이고 $b < c$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$이고
$D > 0$이어야 해가 존재하므로 옳다.
ㄴ주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.