1. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle \mathrm{ABC}$가 $\angle \mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle \mathrm{ABC}$에서 $\angle \mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$
$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$
$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

2. 두 직선 $ax+by+c=0,\ cx+ay+b=0$이 일치할 때, 이 직선과 평행하며, 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $x-y=1$ ② $2x+y=5$ ③ $2x-y=3$

④ $x+2y=5$ ⑤ $x+y=3$

해설

$ax+by+c=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\cdots$㉠

$cx+ay+b=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}\cdots$㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $-\frac{a}{b}=-\frac{c}{a},\ -\frac{c}{b}=-\frac{b}{a}$

$a^2=bc,\ b^2=ac$

$\therefore c=\frac{a^2}{b},\ c=\frac{b^2}{a}$

$\therefore \frac{a^2}{b}=\frac{b^2}{a}$

$\therefore a^3=b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

$\therefore a=b\ (\because a^2+ab+b^2\neq 0\ )$

$\therefore c=\frac{a^2}{b}=\frac{a^2}{a}=a$

$\therefore a=b=c$

$\therefore$ ㉠ : $x+y+1=0,\ y=-x-1$

$\therefore$ 구하는 직선의 기울기 : -1

$\therefore$ 구하는 직선 : $y-1=(-1)(x-2)$

$\Rightarrow x+y-3=0$

3. 원점을 지나고, 점 $(2,\ 1)$에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x축은 제외)

① $y=\frac{2}{3}x$ ② $y=-\frac{2}{3}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=-\frac{4}{3}x$ ⑤ $y=\frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을
$y=kx(k\neq0)$이라 하면,
$(2,\ 1)$에서의 거리가 1이므로
$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, $|2k-1|=\sqrt{k^2+1}$, $k(3k-4)=0$
$k=\frac{4}{3}$ $(\because k\neq0)$
$\therefore\ y=\frac{4}{3}x$

4. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}^2}+\overline{\mathrm{BP}^2}$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad+\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3$, $y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

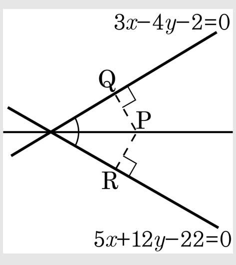
5. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

6. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P는 $(\alpha,\ \alpha - 1)$로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2,\ \alpha = 2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 1)$

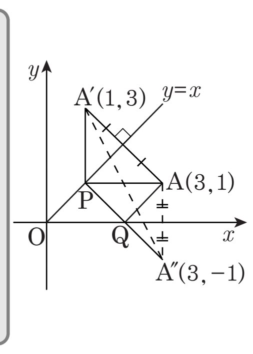
$\therefore\ a^2 + b^2 = 5$

7. 정점 A$(3, 1)$과 직선 $y = x$위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}}$의 최소 거리를 구하면?

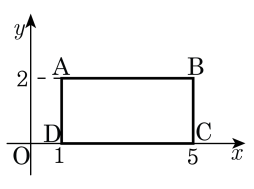
① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A의 $y = x$에 대한 대칭점을 A′
점 A의 x축에 대한 A′라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA''}} \geq \overline{\mathrm{A'A''}}$
$\overline{\mathrm{A'A''}} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}}$의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.



8. 점 $(-1, -1)$ 을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax + by + 1 = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?



① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, -1)$ 을 지나므로, $-a - b + 1 = 0 \ \cdots$ ㉠
그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심 $(\frac{5+1}{2},\ \frac{0+2}{2})$ 를 지나야 한다.
$\Rightarrow \ 3a + b + 1 = 0 \ \cdots$ ㉡
㉠과 ㉡을 연립하면, $a = -1,\ b = 2$
$\therefore \ a - b = -3$

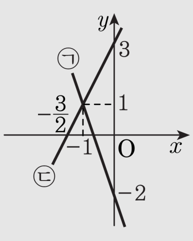
9. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x+y+2=0,\ x+3y+k=0,\ 2x-y+3=0$$

① $k \neq -2$　　② $k \neq -3$　　③ $k \neq -4$
④ $k \neq -7$　　⑤ $k \neq -11$

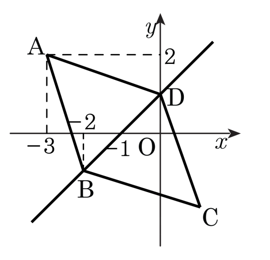
해설

$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢



다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.
㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$,　$\therefore\ k \neq -2$

10. 다음 그림에서 점 B 와 점 D 를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 A$(-3,\ 2)$ 일 때, 마름모 ABCD 의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD 의 중점은 M$(-1,\ 0)$, 사각형 ABCD 가 마름모이므로
$\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$,
$\overline{\mathrm{AM}}$ 의 기울기가 -1 이므로
$\overline{\mathrm{BD}}$ 의 기울기는 1,
점 B와 점 D의 y값을 a, b라 하면
$b-a=2$, $\dfrac{a+b}{2}=0$ 이므로 $a=-1$, $b=1$ 이다.
$\therefore$ D$(0,\ 1)$
$\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{MD}}=\sqrt{2}$ 이므로
마름모 ABCD 의 넓이는
$4\left(\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)=8$

11. 다음 두 직선 $2x+y-2=0, mx-y-3m+5=0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

① $1<m<\frac{5}{2}$ ② $1 \le m < \frac{5}{2}$ ③ $1<m \le \frac{5}{2}$
④ $2<m<\frac{5}{2}$ ⑤ $2 \le m < \frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2}\right)$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

i) $\frac{3(m-1)}{m+2} > 0$

$\Rightarrow$ $m<-2$ 또는 $m>1$

ii) $\frac{2(2m-5)}{m+2} < 0$

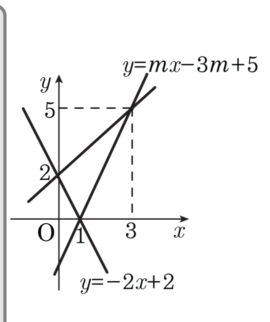
$\Rightarrow -2<m<\frac{5}{2}$

i), ii) 의 공통영역을 구하면 $1<m<\frac{5}{2}$

해설

$2x+y-2=0$ 의 x, y 절편의 좌표를 각각 구하면 $(1, 0)$, $(0, 2)$ 이고 $y=m(x-3)+5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이다. $(0, 2)$ 를 대입하면 $m=1$, $(1, 0)$ 을 대입하면 $m=\frac{5}{2}$

$\therefore$ $1<m<\frac{5}{2}$



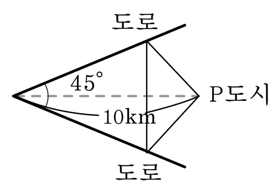
12. y축 위의 한 점 P로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같을 때, 점 P 의 좌표는?

① $(1,-2)$ ② $(-1,2)$ ③ $(0,2)$
④ $(0,1)$ ⑤ $(0,-2)$

해설

y 축 위의 한 점을 P $(0, y)$ 라 하면 직선
$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는
$d_1 = \dfrac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$
직선 $x-y-1=0$
과 점 P 사이의 거리는
$d_2 = \dfrac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$
$d_1 = d_2$ 이므로
$\dfrac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$
양변을 제곱하여 정리하면
$-8y=-8 \therefore y=1$
$\therefore P(0,1)$

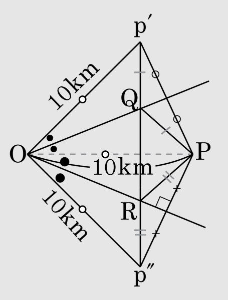
13. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$ 의 각도로 교차하고 있다. 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



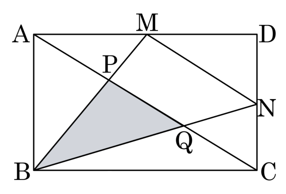
① $10\sqrt{2}$ km　② $12\sqrt{2}$ km　③ $14\sqrt{2}$ km
④ $16\sqrt{2}$ km　⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

점 P 의 두 도로에 대한 대칭점을 각각 P', P'' 이라 하면 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RP''}$ 이고 $\overline{P'P''}$ 가 최단거리가 된다.
$\triangle P'OP''$ 가 직각이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{P'P''}^2=10^2+10^2=200$　$\therefore \overline{P'P''}=10\sqrt{2}$



14. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 M , N 이라 하고, $\overline{BM}$, $\overline{BN}$ 과 $\overline{AC}$ 의 교점을 각각 P , Q 라 한다. 사각형 MPQN 의 넓이가 $30\,cm^2$ 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이는?



① $24\,cm^2$ ② $25\,cm^2$ ③ $28\,cm^2$
④ $30\,cm^2$ ⑤ $36\,cm^2$

해설

점 P 와 점 Q 가 각각 $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ 의 무게중심이므로
$\overline{BP} : \overline{PM} = \overline{BQ} : \overline{QN} = 2 : 1$ 이고 $\overline{PQ} \,/\!/\, \overline{MN}$ 이다.
$\triangle PBQ$ 와 $\triangle MBN$ 의 닮음비가 $2 : 3$ 이므로
$\triangle PBQ : \triangle MBN = 4 : 9$ 이다.
따라서, $\triangle PBQ : \square MPQN = 4 : 5$ 이므로 $\triangle PBQ : 30 = 4 : 5$
$\therefore\ \triangle PBQ = 24(cm^2)$

15. 세 점 $A(1,\ 4)$, $B(-2,\ 3)$, $C(3,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 $D(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

각의 이등분선의 정리에 의해, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\therefore\ \sqrt{10} : 2\sqrt{10} = \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$

$\therefore$ D 는 $\overline{BC}$를 $1 : 2$로 내분하는 점이다.

$$D = \left(\frac{1 \times 3 + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 3}{1+2}\right) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

$\therefore\ a + b = 1$

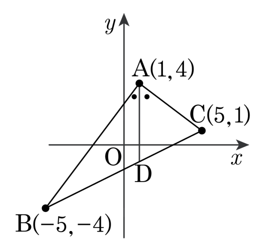
16. 좌표평면 위의 점 $P(3,\ 5)$ 를 지나고 기울기가 정수인 직선 중 x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선의 개수는?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

점 $P(3,\ 5)$ 를 지나고 기울기가
m(m 은정수) 인 직선의 방정식은
$y-5=m(x-3)\cdots$①
①의 x 절편은 $-5=m(x-3)$
$\therefore\ \ x=3-\dfrac{5}{m}$
①의 y 절편은 $y-5=-3m\quad\therefore\ \ y=5-3m$
이 때, 정수 m 에 대하여 x 절편과 y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값이 5 의 약수(음수 포함)이어야 한다.
$\therefore\ \ m=1,\ 5,\ -1,\ -5$
따라서, x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선은
4개이다

17. 다음 그림과 같이 세점 A(1, 4), B(−5, −4), C(5, 1)를 꼭짓점으로 하는 △ABC 가 있다. ∠A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, △ABD 와 △ACD 의 넓이의 비는?



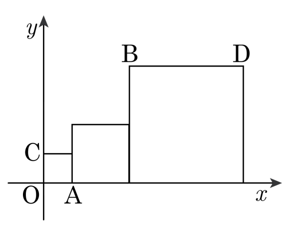
① 1 : 1 ② $\sqrt{2}$: 1 ③ $\sqrt{3}$: 1

④ 2 : 1 ⑤ $\sqrt{5}$: 1

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
각의 이등분선정리에 의해
$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$
$\overline{AB} = \sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{100} = 10$
$\overline{AC} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$
$\therefore\ \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$

18. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $C(0, 4)$, 점 $D(21, 12)$ 일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로

점 $A(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로

점 $B(21-12,\ 12)$

즉, $B(9,\ 12)$

$\therefore\ \overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2+12^2} = 13$

19. $\triangle$ABC의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=10$이면 $\overline{AM}$의 길이는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이므로
$\triangle$ABC 는 직각삼각형이다.
그리고 빗변인 $\overline{BC}$의 중점인 M은 직각삼각형의 외심이다.
$\therefore\ \overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=5$

20. 평면 위에 세 점 $A(0,\ a)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$
$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$
$\therefore\ a = 2$

$a = -3$이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a의 값의 합은
$(3+\sqrt{6}) + (3-\sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

21. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면
$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$
$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로
이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

22. x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ 의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

다음 그림에서

$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$ $+$

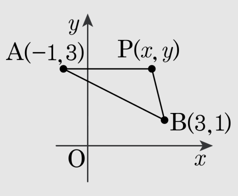
$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 의미 하므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$

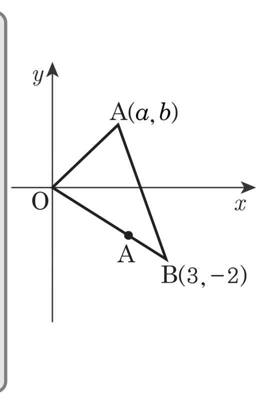


23. 좌표평면 위에 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(3, −2) 가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ $\sqrt{10}$　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $\sqrt{13}$

해설

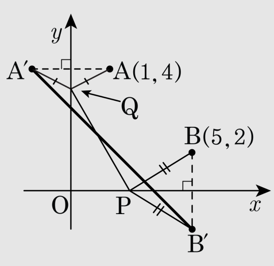
$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고
$\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.
따라서 준식은 세 점 O, A, B가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며 이 때 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$ 이다.



24. 두 점 $A(1, 4), B(5, 2)$ 에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

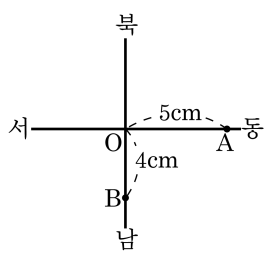


다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이라고 하면
$A'(-1, 4), B'(5, -2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{BP} &= \overline{A'Q}+\overline{PQ}+\overline{B'P} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2} \\ &= \sqrt{72}=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

25. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 5km, B는 남쪽으로 4km의 지점에 있다. A는 시속 4km로 서쪽으로, B는 시속 2km로 북쪽으로 향해서 동시에 출발했을 때, A와 B의 거리가 가장 짧을 때는 몇 시간 후인가?



① 1.4시간 후　　② 1.5시간 후　　③ 1.6시간 후
④ 1.7시간 후　　⑤ 1.8시간 후

해설

남북을 y 축, 동서를 x 축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 A(5, 0), B(0, -4) 이다. 이 때, t 시간 후의 A, B 의 자표는 A($5-4t$, 0), B(0, $-4+2t$) 로 나타낼 수 있다. 따라서 t 시간 후의 A, B사이의 거리 s 는$s = \sqrt{\{0-(5-4t)\}^2 + (-4+2t-0)^2}$

$= \sqrt{20t^2 - 56t + 41} = \sqrt{20\left(t - \frac{14}{10}\right)^2 + \frac{9}{5}}$

s 는 $t = \frac{14}{10}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

26. 좌표평면 위의 두 점 A$(-2, 5)$, B$(6, -3)$을 잇는 선분 AB를 $t : (1-t)$로 내분하는 점이 제 1사분면에 있을 때, t의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $\frac{1}{8} < t < \frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{8} < t < \frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{2} < t < \frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{5}{8} < t < 1$

해설

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

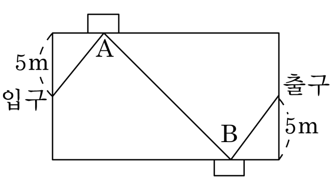
$$\left(\frac{t \cdot 6 + (1-t) \cdot (-2)}{t + (1-t)}, \frac{t \cdot (-3) + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)}\right) = (8t - 2, 5 - 8t)$$

이 점이 제 1사분면에 있기 위해서는

$8t - 2 > 0,\ 5 - 8t > 0$

$\therefore\ \frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$

27. 다음 그림과 같은 전시장에서 관광객이 전시물을 보기 위한 이동 거리를 최소로 하려한다. 전시물 A, B가 있을 때, 전시물 A의 위치는 왼쪽에서 몇 m떨어져 있어야 하는지 구하여라.(단, 이 전시장은 가로 20 m, 세로 10 m인 직사각형 모양이다.)

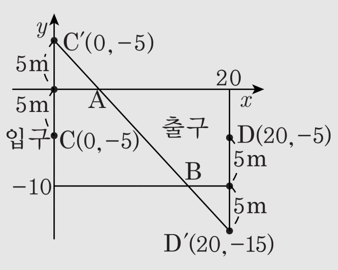


▶ 답 : m

▷ 정답 : 5 m

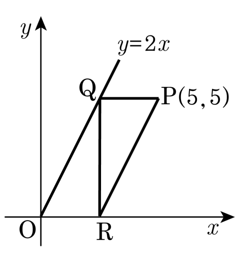
해설

전시장의 입구를 점 C(0, −5), 출구를 점 D(20, −5)라 하자.
점 C(0, −5)를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 C′(0, 5)
점 D(20, −5)를 직선 $y = -10$에 대해 대칭이동한 점은 D′(20, −15)이다.



이 때, 직선 C′D′의 방정식은 $y = -x + 5$이다.
점 A의 좌표는 직선 C′D′이 x축과 만나는 점이므로 (5, 0)이다.
따라서, 왼쪽에서 5 m 떨어진 곳에 전시물 A가 위치해야 한다.

28. 다음 그림에서 점 $P(5,5)$ 와 직선 $y=2x$ 위의 점 Q, x 축 위의 점 R 에 대하여 $\triangle PQR$ 의 둘레의 길이의 최솟값은?



① $4\sqrt{10}$　② $8\sqrt{2}$　③ $5\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{29}$　⑤ 2

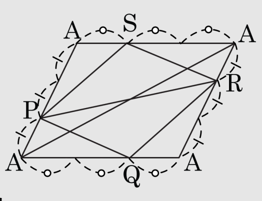
해설

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 의 최솟값은 P 를 $y=2x$ 에 대해 대칭시킨 P' 와 x축에 대해 대칭이동시킨 $P''(5,-5)$ 사이 거리와 같다.
$P'=(a,b)$ 라하면 $\overline{PP'}$ 은 $y=2x$에 수직이고
$\overline{PP'}$ 의 중점은 $y=2x$ 위에 있다
$\therefore\ P'=(1,\ 7)$
$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}\geq\overline{P'P''}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

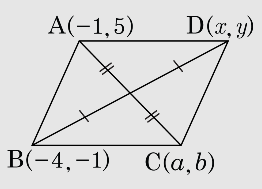
29. 평행사변형 ABCD에 대하여 네 변 AB, BC, CD, DA를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. $A(-1,5)$, $B(-4,-1)$이고 $R(7,6)$일 때, 점 S의 좌표는?

① $(1,6)$ ② $(1,7)$ ③ $(2,6)$ ④ $(2,7)$ ⑤ $(3,6)$

해설



다음 그림에서 사각형 P, Q, R, S는 평행사변형이고
대각선 PR의 중점은 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점과 일치한다.
$A(-1,5)$, $B(-4,-1)$이므로 점 P의 좌표는
$P\left(\frac{-8-1}{2+1}, \frac{-2+5}{2+1}\right)$
$\therefore P(-3,1)$
$R(7,6)$이므로 대각선 PR의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1+6}{2}\right)$
즉 $\left(2, \frac{7}{2}\right) \cdots$ ㉠
이 때, 점 $D(a,b)$로 놓으면
대각선 BD의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) \cdots$ ㉡
㉠과 ㉡이 일치하므로 $\frac{-4+a}{2} = 2$에서 $a = 8$
$\frac{-1+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $b = 8$
따라서 점 $D(8,8)$이므로
변 DA를 $2:1$로 내분하는 점 S의 좌표는
$S\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$
즉 $S(2,6)$



[별해] 다음과 같이 두 꼭짓점 C, D를 $C(a,b)$, $D(x,y)$로 놓으면
$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로
$\frac{-1+a}{2} = \frac{-4+x}{2}$, $\frac{5+b}{2} = \frac{-1+y}{2}$에서
$x - a = 3 \cdots$ ㉠
$y - b = 6 \cdots$ ㉡
$R(7,\ 6)$이므로 $\frac{2x+a}{3} = 7$에서 $a + 2x = 21 \cdots$ ㉢
$\frac{2y+b}{3} = 6$에서 $b + 2y = 18 \cdots$ ㉣
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 5, x = 8$
㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b = 2, y = 8$
$\therefore D(8,8)$
그러므로 변 DA를 $2:1$로 내분하는 점 S의 좌표는
$S\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$
즉 $S(2,6)$

30. 세 점 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$과 점 $P(x, y)$가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$의 최솟값과 그 때의 점 P의 좌표는?

① 30, $P(0, 1)$　② 30, $P(0, 2)$　③ 38, $P(0, 1)$
④ 34, $P(0, 2)$　⑤ 38, $P(0, 2)$

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
$= (x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2$
$= 3x^2 + 3y^2 - 6y + 41$
$= 3x^2 + 3(y-1)^2 + 38$
따라서 최솟값 38, $P(0, 1)$