1. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=1$

④ $d=4$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

2. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$

실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$

순허수가 되기 위해서는

$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$

$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$

$(-3)\times(-1)\times 2=6$

3. 방정식 $(k^2-6)x = k(x+1)+2$의 해가 존재하지 않을 때, k의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

x에 대하여 정리하면

$(k^2-k-6)x = k+2$

$(k+2)(k-3)x = k+2$

$k=3$일 때, $0 \cdot x = 5$ (불능)

4. 방정식 $|x|+|x-1|=9$의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x|+|x-1|=9$에서

i) $x<0$일 때,

$-x-x+1=9$

$\therefore \ x=-4$

ii) $0 \leq x < 1$일 때,

$x-x+1=9$(성립하지 않음)

iii) $x \geq 1$일 때,

$x+x-1=9$

$\therefore \ x=5$

따라서 모든 근의 곱은

$(-4)\times 5=-20$

5. 다항식 $f(x)$를 $ax+b(a \neq 0)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 한다. $xf(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 나머지를 구하면 ?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$$f(x) = (ax+b)Q(x)+R$$
$$= a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$

$\therefore\ x \cdot f(x)$

$$= ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+Rx$$
$$= ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$$
$$= \left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{b}{a}R$$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x) = (ax+b)Q(x)+R$에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a}) = R$

$x \cdot f(x) = \left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x)+R'$이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a}) = R'$

$f(-\frac{b}{a}) = R$를 대입하면 $R' = -\frac{b}{a}R$

6. 1000^{10}을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 할 때, 다음 중 나머지 R를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$에서 $1000 = x$라 하면

$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

$x = -1$을 대입하면 $R = 1$을 구할 수 있다.

7. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2　② $a = 1$ 또는 2　③ $a = -1$ 또는 2

④ $a = 0$ 또는 1　⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

8. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i$$

$\therefore\ 2b - 3a = 0 \quad \therefore\ b = \frac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

9. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k=1$이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

㉠ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

㉡ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

10. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면

$x^2+5yx+ay^2+y-2$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$D=(25-4a)y^2-4y+8$

$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$

$4-200+32a=0$

$\therefore\ a=\frac{49}{8}$

11. a, b, c는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, x의 이차방정식 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근
② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근
④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$$
$$= (a-c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots ㉠ \ (\because \ b \neq 0)$$

$a > 0, \ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로

(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots$㉡

(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

12.

두 복소수 α, β 를 $\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$, $\beta = (3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}$ 이라 할 때,α 는 (가) 이고, β 는(도) (나) 이다.

다음 중 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 양의 실수, 음의 실수
② 음의 실수, 양의 실수
③ 실수, 순허수
④ 순허수, 실수
⑤ 순허수, 순허수

해설

$\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$ 을 직접 계산하기는 어렵다.
따라서 $\overline{\alpha}$ 를 구하여 α 와 $\overline{\alpha}$ 의 관계를 살펴본다.

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \overline{(3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} + (\overline{3-4i})^{10} \Leftarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} + (3+4i)^{10} \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= \alpha\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\alpha} = \alpha$ 이므로 α 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\overline{\beta} &= \overline{(3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} - (\overline{3-4i})^{10} \Leftarrow \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} - (3+4i)^{10} \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= -\beta\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\beta} = -\beta$ 이므로 β 는 순허수이다.

13. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$ ㉠

$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$ ㉡

㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$

그러므로 ㉠에서

$1+8=9(a+b)\cdots$ ㉢

$1+8=-a+b\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$

$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$

$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot 5-8=12$

14. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x-2)Q(x)+5, Q(x)=(x+3)Q_1(x)+3$이므로
$$P(x)=(x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$$
$$=(x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$$
$\therefore\ P(-3)=-9-1=-10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3)=-3\times(-10)=30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3)=3$
$P(x)=(x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x)=x(x-2)Q(x)+5x\cdots①$
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3)=-3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3)=3$을 대입하면 $-3P(-3)=30$

15. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$$f(x)=(x^2+x+1)\frac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$$

$\therefore$ 나머지는 3

16. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

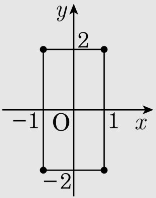
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times4=8$

17. $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1　　② $1-i$　　③ $1+i$　　④ -1　　⑤ 0

해설

$\dfrac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=1$$

18. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x),\ R$　② $3Q(x),\ R$　③ $Q(x),\ 3R$

④ $\frac{1}{3}Q(x),\ R$　⑤ $Q(x),\ \frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$

$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$

$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지 : R

19. x^{30}을 $x-3$으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

$x=3$을 대입하면 $3^{30}=R$

$Q(x)$의 계수의 총합은 $Q(1)$과 같으므로

$x=1$을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$$\therefore\ Q(1)=\frac{3^{30}-1}{2}$$

$$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\frac{3^{30}-1}{2}=\frac{3^{30}+1}{2}=\frac{1}{2}(3^{30}+1)$$

20. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다. ㉡ $z + \bar{z} = 0$ 이면, z 는 순허수이다. ㉢ $z + \bar{z}$ 는 항상 실수이다. ㉣ $z - \bar{z}$ 는 항상 순허수이다. ㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$

㉠ $z\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 0, a = 0$

$\therefore \ z = bi \Rightarrow$ 순허수 ($\because \ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z + \bar{z} = 2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b = 0$ 인 경우

$z - \bar{z} = 0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z} = c + di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\frac{1}{z}} = c - di$ 이므로 참