1. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2,\ k=10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

2. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k<1$ ② $k\le 1$ ③ $k<3$

④ $k\le 3$ ⑤ $1<k<3$

해설

$3x^2+6x+k=0,$

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3\cdot k\ge 0$

$3k\le 9 \quad \therefore\ k\le 3$

3. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$　② $k > 3$　③ $k \le 2$　④ $k > 2$　⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D<0$

$3x^2-6x+k=0$

$\frac{D}{4}=9-3k<0$

$\therefore\ k>3$

4. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7)+3=0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ 5 ⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7)+3=0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D<0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4\cdot(1-k)\cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\dfrac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

5. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

6. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

7. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.

따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$

위의 식을 정리하면

$-k^2+4k-3=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$에서

$k=1$ 또는 $k=3$

8. x에 대한 이차식 $2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이므로

$D=(k+1)^2-8(k-1)=0$

$(k-3)^2=0$

$\therefore\ k=3$

9. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ **답:**

▷ **정답:** 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면
$(x^2+2x+1)+2=0,\quad (x+1)^2=-2$
$\therefore a=1,\ b=-2$
$\therefore a-b=3$

10. 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$

② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$

③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$

⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$

$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0 \therefore\ k>1$

11. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$ ㉡ $x^2 + bx + a = 0$

㉢ $ax^2 + x + b = 0$ ㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

12. 양의 실수 a, b에 대하여 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$의 두 근이 서로 같을 때, $a+b$의 값은?

① $1+\sqrt{5}$ ② $1-\sqrt{5}$ ③ $2+\sqrt{3}$

④ $2-\sqrt{3}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

해설

복소계수 이차방정식에서도 중근을 가질 조건은 $D=0$ 이다.

$ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$ 에서

$$\frac{D}{4}=(b+i)^2-a(1+2i)=0$$

위의 식을 정리하면

$(b^2-1-a)+(2b-2a)i=0$ ······㉠

a, b 가 실수이므로 ㉠에서

$b^2-1-a=0$ ······㉡

$2b-2a=0$ ······㉢

㉢에서 $a=b$

$a=b$ 를 ㉡에 대입하면

$b^2-1-b=0$, $b^2-b-1=0$

$$\therefore\ b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

그런데 a, b 가 양의 실수이므로

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\therefore\ a+b=1+\sqrt{5}$

13. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y-4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2) + a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$　② $a \geq 4$　③ $a \leq 4$

④ $a \geq -4$　⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면

$x^2 - kx + (2k - a) = 0$

실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$이어야 한다.

$k^2 - 4(2k - a) \geq 0$

$k^2 - 8k + 4a \geq 0$

위 부등식을 k에 대하여 정리하면

$(k-4)^2 + 4a - 16 \geq 0$

실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

판별식 $\frac{D}{4} \leq 0$이거나,

$4a - 16 \geq 0 (\because (k-4)^2 \geq 0)$이어야 한다.

따라서 $a \geq 4$

15. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

16. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $ax^2 - bx + 1 = 0$

ㄴ $x^2 - ax - b = 0$

ㄷ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

ㄱ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

ㄴ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

ㄷ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$$

17. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\geq 0$$

$$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

18. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

19. x에 관한 이차방정식 $x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+3b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.

$D' = (m+a-2)^2 - (m^2+a^2-3b) = 0$

$\Rightarrow \quad 2m(a-2)+4-4a+3b=0$

m에 관계없이 성립하려면,

$a=2 \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{4}{3}$

$a+3b=6$

20. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k+a)x + (k^2 + 4k - 2b) = 0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중근을 갖으려면 판별식이 0이어야 한다.

$D' = (k+a)^2 - (k^2 + 4k - 2b) = 0$

$(2a-4)k + a^2 + 2b = 0$

모든 k에 대해서 성립하려면,

$2a - 4 = 0$이고 $a^2 + 2b = 0$

$\therefore\ a = 2, \quad b = -2$

$\therefore\ a - b = 4$

21. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, a, b가 정수일 때, 순서쌍 (a, b)의 갯수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$

$a^2+6a+1+4b^2=0$

$\Rightarrow \quad (a+3)^2+(2b)^2=8$

a, b가 정수이므로

$a+3=\pm 2, \quad 2b=\pm 2$

$\therefore \quad a=-1, \ -5, \quad b=1, -1$

가능한 순서쌍 (a, b)의 갯수 : 4개

22. x에 대한 이차식 $a(1-x^2)-2bx+c(1+x^2)$이 완전제곱식일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① a를 빗변으로 하는 직각삼각형

② b를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ c를 빗변으로 하는 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a(1-x^2)-2bx+c(1+x^2)$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$(c-a)x^2-2bx+a+c$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$c-a\neq 0$이고, $\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=b^2-(c-a)(c+a)=0$

$b^2-(c^2-a^2)=0,\quad b^2-c^2+a^2=0$

$\therefore c^2=b^2+a^2$

따라서 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

23. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

(주어진 식)$= 0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2 - (a+y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$

근의 공식에서

$$x = \frac{a + y \pm \sqrt{(a+y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2}$$

$$= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a+6)y + a^2 + 4}}{2}$$

주어진 식이 x, y에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식($= D$) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a+6)y + a^2 + 4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a+6)^2 - 9(a^2+4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

$\therefore\ 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$