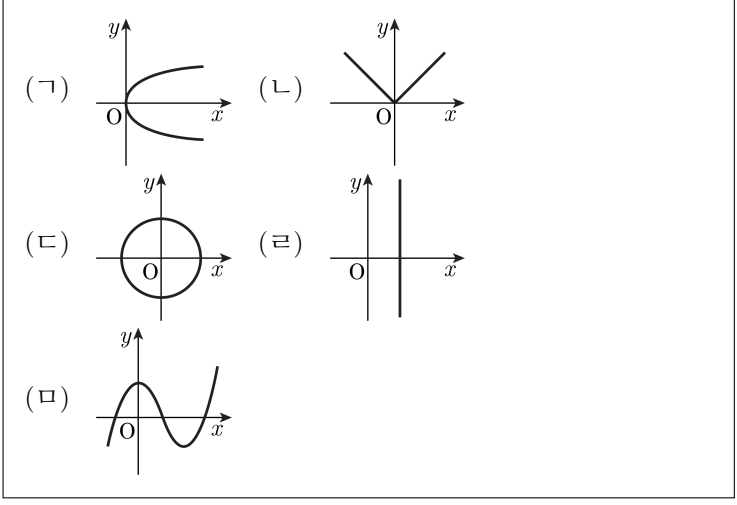


1. 다음의 곡선 중 $f: x \rightarrow y$ 인 함수의 그래프가 되는 것을 모두 고르면?



- ① (㉡), (㉢)
- ② (㉡), (㉣)
- ③ (㉡), (㉤)
- ④ (㉡), (㉣), (㉤)
- ⑤ (㉠), (㉡), (㉢), (㉣), (㉤)

해설

- (㉠) $x > 0$ 인 x 에 대하여 y 가 두 개씩 대응하므로 함수의 그래프가 아니다.
- (㉡) 모든 x 에 대하여 y 가 하나씩 대응하므로 함수의 그래프가 된다.
- (㉢) 정의역 안에 있는 x 에 대하여 y 가 하나 또는 두 개씩 대응하므로 함수가 아니다.
- (㉣) 어떤 x 에 대해서는 무수히 많은 y 가 대응하므로 함수가 아니다.
- (㉤) 모든 x 에 대하여 y 가 하나씩 대응하므로 함수가 된다.

2. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$ 이므로

$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

3. 다음 중 항등함수를 찾으면?

- ① $f(x) = x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x - 1$
④ $f(x) = x^2$ ⑤ $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는 $f(x) = x$ 또는 $y = x$ 이다.

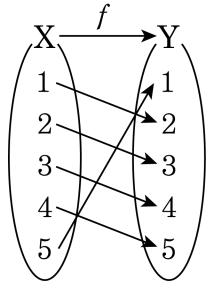
5. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

6. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$
 $\therefore a = 1$

7. 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으면?

보기

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$

㉡ $g(x) = |x|$

㉢ $h(x) = x^2$

㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = |x| = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$

8. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x - 1$$

$$\therefore h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

해설

$$f(h(2)) = g(2) \text{ 에서, } h(2) = a \text{ 라 두면, } g(2) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(a) = 3, \frac{a-1}{a+2} = 3$$

$$\text{이를 풀면 } \therefore a = h(2) = -\frac{7}{2}$$

9. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $f(1) = 1$
② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$
③ $f(a^2) = 2f(a)$
④ $f(a^n) = nf(a)$
⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x, a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수

10. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$f : x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a \quad (x \in R, a \in R)$

함

수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -1$
- ② $a \leq -1$
- ③ $a > -1$
- ④ $a < 1$
- ⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 에서 $x \geq 1, x < 1$ 인 경우로 나누면,
 $x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1) + (2-a)x + a$
 $x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x) + (2-a)x + a$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
 $x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0, a-1 < 0$

$\therefore a < 1$

11. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

- ① 60 ② 55 ③ 51 ④ 48 ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ 이므로

$$2a = 2a^2, 3a = 4ab + 3a, a + b = 2b^2 + 3b + 1$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 0$ ($\because a \neq 0$)

즉, $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 \end{aligned}$$

13. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4-2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\frac{2x-1}{3} = t$ 로 놓으면

$2x-1 = 3t$ 이므로 $x = \frac{3t+1}{2}$

$f(t) = 4 - 2 \cdot \frac{3t+1}{2} = -3t + 3$

$\therefore (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3) = 12$

14. 함수 $f(x) = x+2$ 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f \circ f^2 = f^3, \dots, f \circ f^{99} = f^{100}$ 으로 정의할 때, $f^{100}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$$f(x) = x + 2$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f(x+2) = (x+2) + 2 \\ &= x + 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

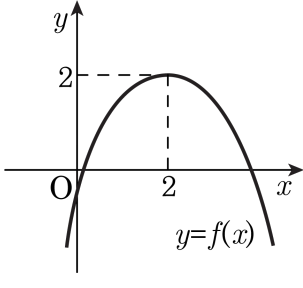
$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(x+2 \cdot 2) = (x+2 \cdot 2) + 2 \\ &= x + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f^{100}(x) = x + 2 \cdot 100$$

$$\therefore f^{100}(1) = 1 + 2 \cdot 100 = 201$$

15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

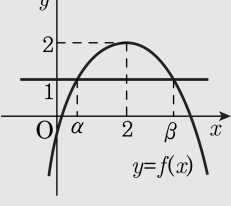


- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
 $f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만
 $f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



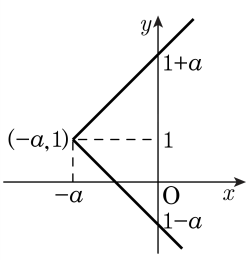
따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

16. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의
그래프는 $|y|=x$ 를
 x 축 음의 방향으로 a ,
 y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$
 $\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=4 \quad \therefore a=2(a>0)$



17. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$, $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \leq a \leq 1$
 ④ $-1 \leq a \leq 1$ ⑤ $-2 \leq a \leq 2$

해설

두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$,
 $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여
 q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
 각각의 진리집합을 P, Q 라 하면 $Q \subset P$
 이다.

$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
 반지름의 길이가 2인 원이고,

$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는

$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

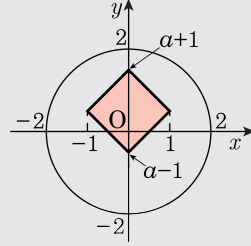
이 때 $P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y - a| \leq 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.

따라서 $Q \subset P$ 이라면 다음 그림에서

$a + 1 \leq 2, a - 1 \geq -2$

$\therefore -1 \leq a \leq 1$



18. 함수 $y = |x - 2| + |x + 1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x - 2| + |x + 1|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$y = -(x - 2) - (x + 1) = -2x + 1$$

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$y = -(x - 2) + (x + 1)$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$y = (x - 2) + (x + 1) = 2x - 1 = 3$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4 개다.

