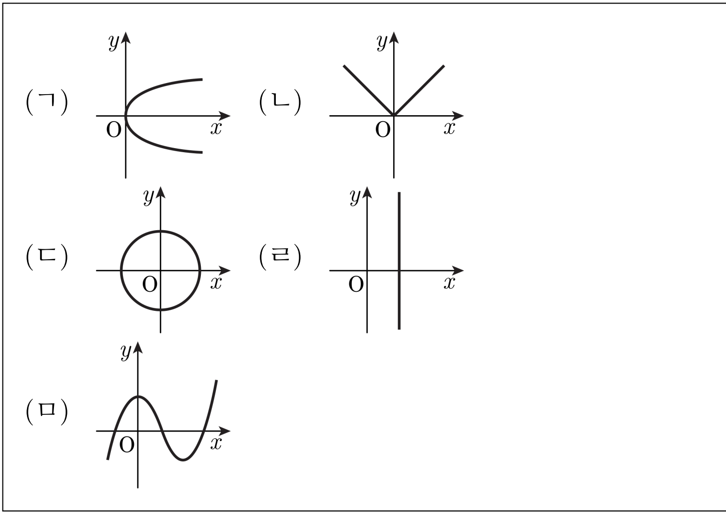
**1.** 다음의 곡선 중 $f : x \to y$ 인 함수의 그래프가 되는 것을 모두 고르면?




① (ㄴ), (ㄷ)

② (ㄴ), (ㄹ)

③ (ㄴ), (ㅁ)

④ (ㄴ), (ㄹ), (ㅁ)

⑤ (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ), (ㄹ), (ㅁ)

**해설**

(ㄱ) $x > 0$ 인 $x$ 에 대하여 $y$ 가 두 개씩 대응하므로 함수의 그래프가 아니다.

(ㄴ) 모든 $x$ 에 대하여 $y$ 가 하나씩 대응하므로 함수의 그래프가 된다.

(ㄷ) 정의역 안에 있는 $x$ 에 대하여 $y$ 가 하나 또는 두 개씩 대응하므로 함수가 아니다.

(ㄹ) 어떤 $x$ 에 대해서는 무수히 많은 $y$ 가 대응하므로 함수가 아니다.

(ㅁ) 모든 $x$ 에 대하여 $y$ 가 하나씩 대응하므로 함수가 된다.

**2.** 두 집합 $X = \{0,\ 1,\ 2\}$, $Y = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 $X$에서 $Y$로의 함수 $f$가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 $f$의 치역을 구하면?

① $\{-1,\ 1\}$ ② $\{-1,\ 0,\ 1\}$ ③ $\{0,\ 1,\ 2\}$

④ $\{-1,\ 0,\ 2\}$ ⑤ $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$이므로

$f(0) = 0,\ f(1) = -1,\ f(2) = 2$

따라서 치역은 $\{-1,\ 0,\ 2\}$

**3.** 다음 중 항등함수를 찾으면?

① $f(x) = x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x - 1$

④ $f(x) = x^2$ ⑤ $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는 $f(x) = x$ 또는 $y = x$ 이다.

**4.** 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c\}$에 대하여 $X$ 에서 $Y$ 로의 상수함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 3 가지

해설

함수 $f$ 가 상수함수인 경우는
$f(1) = f(2) = f(3) = a$
$f(1) = f(2) = f(3) = b$
$f(1) = f(2) = f(3) = c$ 의 3가지이다

**5.** 두 함수 $f(x) = 2x + 1$ , $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

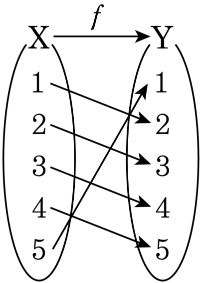
① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$

④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

**해설**

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

**6.** 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이고, 함수 $f : X \to X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 $a$의 값은?




① 1  ② 2  ③ 3  ④ 4  ⑤ 5

해설

$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$

$\therefore\ a = 1$

**7.** 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으면?

**보기**

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$　　㉡ $g(x) = |x|$

㉢ $h(x) = x^2$　　㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

**해설**

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = |x| = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$

**8.** 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$의 값은?

① $\dfrac{7}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $-\dfrac{7}{2}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\left\{h(x)-1\right\} = (x+1)\left\{h(x)+2\right\}$$

$$2h(x) = -3x-1$$

$$\therefore\ h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore\ h(2) = -\frac{7}{2}$$

해설

$f(h(2)) = g(2)$ 에서, $h(2) = a$ 라 두면, $g(2) = 3$ 이므로

$f(a) = 3$ , $\dfrac{a-1}{a+2} = 3$

이를 풀면 $\therefore\ a = h(2) = -\dfrac{7}{2}$

**9.** 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 임의의 양수 $a, b$에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 1$

② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③ $f\left(a^2\right) = 2f(a)$

④ $f\left(a^n\right) = nf(a)$

⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면

$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$

$\therefore\ f(1) = 0$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a{\cdot}a{\cdot}\cdots{\cdot}a) = f(a)+f(a)+\cdots+f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x,\ a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$이므로 $f(x)$는 감소함수

**10.** $R$ 가 실수 전체의 집합일 때, $R$ 에서 $R$ 로의 함수 $f$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f : x \rightarrow a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)$$

함수 $f$ 가 일대일 대응이 되도록 하는 $a$ 의 값의 범위는?

① $a < -1$ ② $a \leq -1$ ③ $a > -1$

④ $a < 1$ ⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \geq 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $R$ 에서 $R$ 로의 일대일 대응이려면

$x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$

**11.** 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 $f$ 가 일대일 함수이다. $f$ 중에서 임의의 $x$ 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$ : 4 가지

$f(2)$ : 3 가지

$f(3)$ : 2 가지

$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3)=3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore\ 24-6=18$ (가지)

**12.** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f$, $g$가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 $x$에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60　② 55　③ 51　④ 48　⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$

$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$

$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡

모든 실수 $x$에 대하여 ㉠ = ㉡이므로

$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0 (\because a \neq 0)$

즉, $f(x) = x$이므로

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$

$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

**13.** $f\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)=4-2x$ 일 때, $(f\circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\dfrac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면

$2x-1=3t$ 이므로 $x=\dfrac{3t+1}{2}$

$f(t)=4-2\cdot\dfrac{3t+1}{2}=-3t+3$

$\therefore (f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-3)=12$

**14.** 함수 $f(x)=x+2$ 에 대하여 $f\circ f=f^2,\ f\circ f^2=f^3, \cdots\ f\circ f^{99}=f^{100}$ 으로 정의할 때, $f^{100}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

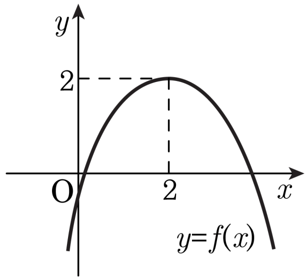
$$f(x)=x+2$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f(x+2) = (x+2)+2 \\ &= x+2\cdot 2 \\ f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(x+2\cdot 2) = (x+2\cdot 2)+2 \\ &= x+2\cdot 3 \\ &\quad\ \ \vdots \end{aligned}$$

$$f^{100}(x)=x+2\cdot 100$$

$$\therefore\ f^{100}(1)=1+2\cdot 100=201$$

**15.** 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는?




① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

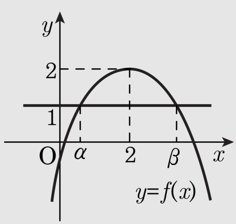
$(f \circ f)(x) = 1$을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$

$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$을 만족하는 $t$의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.

이 때, $f(x) = \alpha$를 만족하는 $x$의 값은 2개이지만

$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.




따라서, $(f \circ f)(x) = 1$을 만족하는 $x$의 값은 2개이다.

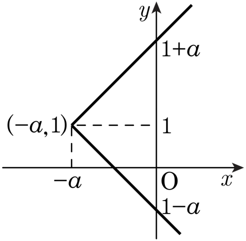
**16.** $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 $a$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의
그래프는 $|y|=x$를
$x$ 축 음의 방향으로 $a$,
$y$ 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, $y$ 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=4\qquad \therefore\ a=2(a>0)$



**17.** 두 조건 $p : x^2+y^2 \le 4$ , $q : |x|+|y-a| \le 1$에 대하여 $q$는 $p$이기 위한 충분조건일 때, $a$의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$　　② $-2 < a < 2$　　③ $-2 \le a \le 1$

④ $-1 \le a \le 1$　　⑤ $-2 \le a \le 2$

해설

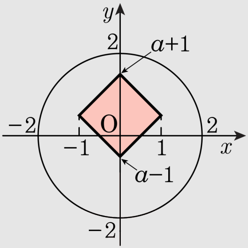
두 조건 $p : x^2+y^2 \le 4$,

$q : |x|+|y-a| \le 1$ 에 대하여

$q$ 는 $p$ 이기 위한 충분조건이므로

각각의 진리집합을 $P$, $Q$라 하면 $Q \subset P$

이다.




$x^2+y^2=4$ 는 중심이 원점이고

반지름의 길이가 2인 원이고,

$|x|+|y-a|=1$ 의 그래프는

$|x|+|y|=1$ 의 그래프를

$y$ 축의 방향으로 $a$ 만큼 평행이동한 것이다.

이 때 $P=\{(x,\ y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$

$Q=\{(x,\ y) \mid |x|+|y-a| \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.

따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서

$a+1 \le 2$ , $a-1 \ge -2$

$\therefore -1 \le a \le 1$

**18.** 함수 $y = |x-2| + |x+1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 $m$ 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

**해설**

$y = |x-2| + |x+1|$ 에서

i ) $x < -1$ 일 때,

$y = -(x-2) - (x+1) = -2x + 1$

ii ) $-1 \le x < 2$ 일 때,

$y = -(x-2) + (x+1)$

iii) $x \ge 2$ 일 때.

$y = (x-2) + (x+1) = 2x - 1 = 3$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 $y$ 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 $m$ 은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 4 개다.