**1.** $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이고 $x+3y=8$ 일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

① 2　② 3　③ $\sqrt{10}$　④ $\sqrt{15}$　⑤ 4

해설

$x,\ y$ 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(\sqrt{x}+\sqrt{3y})^2 \leq (1^2+1^2)\left(\,(\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\right\}$
$=2(x+3y)$
$=16$ (단, 등호는 $x=3y$ 일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x}+\sqrt{3y} \geq 0$ 이므로
$0 \leq \sqrt{x}+\sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

**2.** $x$, $y$가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$x, y$가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore -10 \leq x+3y \leq 10$
(단, 등호는 $x=\frac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

**3.** $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\ \sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\ \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2, \quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다] 에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$이고 $b=c$
③ $(\ \sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$이고$c=2$
⑤ $(\ \sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\ \sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\ \sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\ \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$일 때 성립)