

1. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

① 2

② 3

③ $\sqrt{10}$

④ $\sqrt{15}$

⑤ 4

해설

x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2\}$$

$$= 2(x + 3y)$$

$$= 16 \text{ (단, 등호는 } x = 3y \text{ 일 때 성립)}$$

그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$$

따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

2. x, y 가 실수이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때 $x + 3y$ 의 최댓값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

이 때, $x^2 + y^2 = 10$ 이므로

$$100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

(단, 등호는 $x = \frac{y}{3}$ 일 때 성립)

따라서 최댓값은 10이다.

3. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$$

이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$ab+bc+ca \geq 3([가])$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$$

$$= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{따라서 } 3\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$$

(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$ ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
 ③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$ ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
 ⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$$

이 때 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$ab+bc+ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$\therefore 8 \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$$

$$= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{따라서 } 3\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$$

(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)