1. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

2. $a > b > 0$ 일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$ 의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$
② $2a+b \leq a+2b$
③ $2a+b > a+2b$
④ $2a+b \geq a+2b$
⑤ $2a+b = a+2b$

해설

$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$

$\therefore 2a+b > a+2b$

3. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$
② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$
③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$
④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$
⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 = (x+1) - (y+1)$$
$$= x - y > 0$$
$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

4. $p : -1 \le x \le 1$ 또는 $x \ge 3$, $q : x \ge a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 조건 p, g 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
$\therefore \ a \le -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

5. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \cup (Q - P) = P$ 인 관계가 성립한다면 q 는 p 이기 위한 무슨 조건인가?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.

해설

$$\begin{aligned} P \cup (Q - P) &= P \cup (Q \cap P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap U \\ &= P \cup Q \end{aligned}$$

에서 $P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$

따라서, q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A=B$ ② $B\subset A$ ③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A^C=B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A와 B의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

7. 다음 부등식 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $3^{40} > 2^{60}$	㉡ $3^{200} > 6^{150}$
㉢ $5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\frac{3^{40}}{2^{60}} = \frac{(3^2)^{20}}{(2^3)^{20}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{20} > 1$

$\therefore\ 3^{40} > 2^{60}$

㉡ $\frac{3^{200}}{6^{150}} = \frac{(3^4)^{50}}{(6^3)^{50}} = \frac{(3^4)^{50}}{(2^3 \cdot 3^3)^{50}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{50} < 1$

$\therefore\ 3^{200} < 6^{150}$

㉢ $\frac{5^{10}}{2^{30}} = \frac{5^{10}}{(2^3)^{10}} = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} < 1 \quad \therefore\ 5^{10} < 2^{30}$

$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1 \quad \therefore\ 2^{30} < 3^{20}$

$\therefore\ 5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

8. 두 수 $2^{30}, 3^{30}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$ ② $2^{30} \leq 3^{20}$ ③ $2^{60} > 3^{20}$
④ $2^{60} \geq 3^{20}$ ⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$\therefore 2^{30} < 3^{20}$

9. 부등식 $n^{20} < 3^{30}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\frac{n^{20}}{3^{30}} = \frac{(n^2)^{10}}{(3^3)^{10}} = \left(\frac{n^2}{27}\right)^{10} < 1$

$\frac{n^2}{27} < 1$ 이므로 $n^2 < 27$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 5이다.

10. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\ \ \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

11. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　　② $q \to \sim p$　　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q \quad s \to \sim r \quad q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$