1. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

2. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$
④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$
$(x - y)(x - 2y)$
$\Rightarrow \quad (x - y)(x - 2y) = 0$
$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$
i) $x = y$
$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$
$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$
ii) $x = 2y$
$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$
$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$
$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

4. $x = \alpha,\ y = \beta$가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases}$$ 의 해일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \cdots① \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \cdots② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① × 3 − ② × 2 하면

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0,\ (x - 2y)(x - y) = 0,$

$x = 2y\ or\ x = y$

$x = 2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2,\ 0 = -2$ 불능

$x = y$를 ①식에 대입하면

$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$

$y^2 = 1,\ y \pm 1,\ x \pm 1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$

5. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x,\ y$ 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t+4)=0$ 에서
$t=1$ 또는 $t=-4$
따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

6. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

$$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-4$ 또는 $u=3$

(i) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$

따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)

$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ii) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$

따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

7. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$
이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$
④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$

$4a+3\geq 0$

$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$