

1. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

2. 연립방정식 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy - y^2 = 6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x = p, y = q$ 또는 $x = r, y = s$ 이다. $p + q + r + s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & \cdots \textcircled{㉠} \\ xy - y^2 = 6 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $x = 2y + 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$y^2 + y - 6 = 0(y - 2)(y + 3) = 0$$

$$\therefore y = 2, -3$$

$y = 2, y = -3$ 을 ㉢에 대입하면

$$\text{각각 } x = 5, x = -5$$

$$\therefore x = 5, y = 2 \text{ 또는 } x = -5, y = -3$$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x - y)(x - 2y)$$

$$\Rightarrow (x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = y$

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2$$

ii) $x = 2y$

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$$

4. $x = \alpha$, $y = \beta$ 가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases} \quad \text{의 해일 때, } \alpha^2 + \beta^2 \text{의 값은?}$$

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots \textcircled{1} \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ 하면

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$$

$$x = 2y \text{ or } x = y$$

$x = 2y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2 \text{불능}$$

$x = y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$$

$$y^2 = 1, y \pm 1, x \pm 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$$

5. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t - 1)(t + 4) = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$

6. 연립방정식 $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 라 하면

$$\begin{cases} u + v = 5 & \cdots \textcircled{㉠} \\ u^2 - v = 7 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$u^2 - (5 - u) = 7$$

$$u^2 + u - 12 = 0$$

$$(u + 4)(u - 3) = 0$$

$$\therefore u = -4 \text{ 또는 } u = 3$$

(i) $u = -4$, $v = 9$, 즉 $x + y = -4$, $xy = 9$ 일 때, x, y 는 $t^2 + 4t + 9 = 0$ 의 두 근이므로 $t = -2 \pm \sqrt{5}i$

따라서, $x = -2 \pm \sqrt{5}i$, $y = -2 \mp \sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)
 $(-2 + \sqrt{5}i, -2 - \sqrt{5}i)$, $(-2 - \sqrt{5}i, -2 + \sqrt{5}i)$

(ii) $u = 3$, $v = 2$, 즉 $x + y = 3$, $xy = 2$ 일때, x, y 는 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 두 근이므로

$$(t - 1)(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서, $x = 1$, $y = 2$ 또는 $x = 2$, $y = 1$ 이므로
 $(1, 2)$, $(2, 1)$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

7. x, y 에 대한 연립방정식
$$\begin{cases} x + y = a + 2 \\ xy = \frac{a^2 + 1}{4} \end{cases}$$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\frac{3}{4}$

② $a > -\frac{1}{2}$

③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \frac{2}{3}$

⑤ $a < 2$

해설

$$\begin{cases} x + y = a + 2 \\ xy = \frac{a^2 + 1}{4} \end{cases}$$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2 -$

$$(a + 2)t + \frac{a^2 + 1}{4} = 0$$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$$D = (a + 2)^2 - 4 \times \frac{a^2 + 1}{4} \geq 0$$

$$4a + 3 \geq 0$$

$$\therefore a \geq -\frac{3}{4}$$