1. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$일 때, $x \in X$인 임의의 x에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \to 1$ ② $x \to |x|$

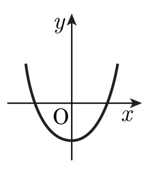
③ $x \to x^2 + 1$ ④ $x \to 2x$

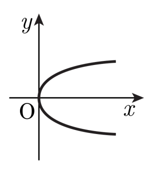
⑤ $x \to x^2 + x + 1$

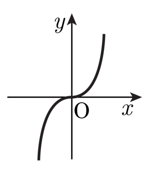
해설

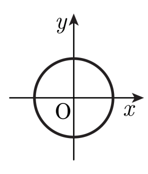
④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

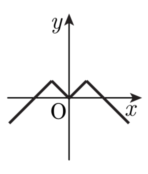
2. 다음 중에서 함수의 그래프가 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면?

①


②


③


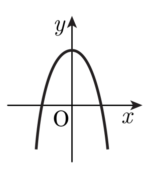
④


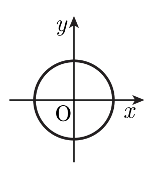
⑤


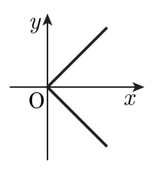
해설

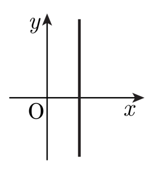
②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

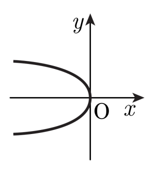
3. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

4. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$f(x) = g(x)$이므로
$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서
$3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
$(x-5)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = 5,\ -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.
$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

5. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4)+g(-1) = 4-2 = 2$

6. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$(x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore\ f(2) = 2$

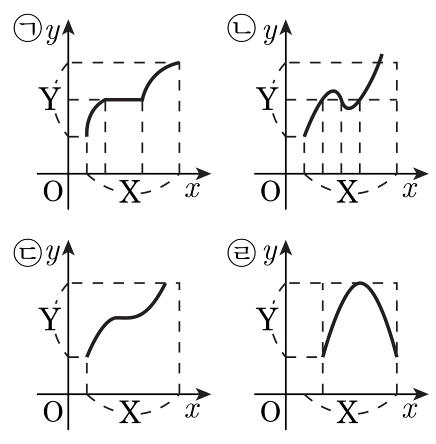
모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore\ g(4) = -3$

$\therefore\ f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

7. 함수 $f : X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

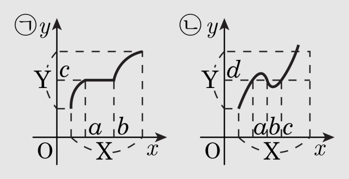


① (ㄱ) (ㄷ) ② (ㄴ) (ㄹ) ③ (ㄷ)

④ (ㄱ) ⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

X에서 Y로의 일대일 대응을 찾으면 된다.



㉠ $\{x|a \le x \le b\}$에 속하는 x의 상이 모두 c이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ a, b, c의 상이 모두 d이므로 일대일 대응이 아니다.

㉣, ㉡의 경우와 같다.

8. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x + 1$ ㉡ $g(x) = x^2$

㉢ $h(x) = -x$ ㉣ $k(x) = |x|$

① 4 개 ② 3 개 ③ 2 개 ④ 1 개 ⑤ 없다

해설

이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)
㉠은 증가만 하는 일대일 대응.
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.
답은 2 개

9. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 보기 중 함수 $f : X \to X$로 가능한 것의 개수는 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x$ ㉡ $f(x) = x^2$ ㉢ $f(x) = |x|$

㉣ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ㉤ $f(x) = \sqrt{x}$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ $f(x) = -x$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = -1 \in X$
따라서 함수이다.
㉡ $f(x) = x^2$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = 1 \in X$
따라서 함수이다.
㉢ $f(x) = |x|$에서 $f(-1) = 1 \in X,\ f(0) = 0 \in X,\ f(1) = 1 \in X$
따라서 함수이다.
㉣ $f(x) = \dfrac{1}{x}$에서 $f(0)$이 정의되지 않으므로 함수가 아니다.
㉤ $f(x) = \sqrt{x}$에서 $f(-1) = i \notin X$이므로 함수가 아니다.
따라서 함수로 가능한 것은 ㉠, ㉡, ㉢의 3개다.

10. $x^2 \neq 1$ 이고, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때, $f(-x)$ 를 $f(x)$ 를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$ ② $-f(x)$ ③ $\{f(x)\}^2$

④ $\frac{1}{f(x)}$ ⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

11. 함수 f 의 정의역이 $A = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$이고,

$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in Q) \\ 1 & (x \notin Q) \end{cases}$ 이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중 맞는 것은?(Q는 유리수 전체의 집합)

① 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

② 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다

③ 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.

④ 부등식 $y < x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

⑤ 부등식 $y < x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

해설

함수 f 의 그래프를 그리면 y값이 0, 1인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.
따라서 부등식 $y \ge x,\ \ y < x$ 의 영역 안에도 무수히 많다

12. 모든 실수 x에 대하여 정의된 함수 $f(x) = [x] + [-x]$의 치역은 무엇인가? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대정수이다.)

① $\{0, -1\}$ ② $\{1, -1\}$ ③ $\{0,\ 1\}$

④ $\{0,\ 1, -1\}$ ⑤ $\{0\}$

해설

정수 n에 대하여

$x = n$이면, $f(n) = [n] + [-n] = n - n = 0 \cdots$ ㉠

$n < x < n + 1$이면 $[x] = n$

$-n - 1 < -x < -n$에서 $[-x] = -n - 1$

$\therefore\ f(x) = [x] + [-x] = n + (-n - 1) = -1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 치역은 $\{0, -1\}$

13. 자연수 n을 $n = 2^p \cdot k$ (p는 음이 아닌 정수, k는 홀수)로 나타낼 때, $f(n) = p$라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$이다. 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ n이 홀수이면 $f(n) = 0$이다.

ㄴ $f(8) < f(24)$이다.

ㄷ $f(n) = 3$인 자연수 n은 무한히 많다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

$n = 2^p \cdot k$에서
ㄱ n이 홀수이면, k가 홀수이므로 2^p이 홀수
$\therefore p = 0$ 즉, $f(n) = 0$
ㄴ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
ㄷ $f(n) = 3$에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k는 무수히 많으므로 n도 무수히 많다.

14. 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 $x,\ y$ 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $f(1) = 0$
② $f(6) = f(2) + f(3)$
③ $f(x^2) = f(2x)$
④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
⑤ $f(8) = 3f(2)$

해설

임의의 양수 $x,\ y$ 에 대하여
$f(xy) = f(x) + f(y)$ 가 성립해야하므로
① $x = 1,\ y = 1$ 을 대입하면
$f(1) = f(1) + f(1)$
$\therefore\ f(1) = 0$
$\therefore$ 참
② $x = 2,\ y = 3$ 을 대입하면
$f(6) = f(2) + f(3)$
$\therefore$ 참
③ $x = x,\ y = x$ 를 대입하면
$f(x^2) = f(x) + f(x) = 2f(x)$
$\therefore\ f(x^2) \neq f(2x)$
$\therefore$ 거짓
④ $x = x,\ y = \frac{1}{x}$ 를 대입하면
$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$
① 에서 $f(1) = 0$ 이므로
$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
$\therefore$ 참
⑤ $x = 4,\ y = 2$ 를 대입하면,
$f(4 \times 2) = f(4) + f(2) \cdots$ ㉠
또, $4 = 2 \times 2$ 이므로,
$f(4) = f(2) + f(2) \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $f(8) = 3f(2)$
$\therefore$ 참

15. 함수 f가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서
$x=0$, $y=0$ 을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0)$, $f(0)=2f(0)$
$\therefore\ f(0)=0$

16. 함수 $f : A \to B$ 에서 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \left\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\right\}$ 이고, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 이므로
$B = \left\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\right\}$ 에서 $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$ 으로 표현된다.
이 때, 정의역 중에서 $1,\ \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.
따라서 $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$
$= 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 = 9$

17. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에
$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

18. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때
$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$
$x = 9,\ y = 3$ 일 때
$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

19. 다음 보기 중 두 함수 f, g 가 서로 같은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = |x|$, $g(x) = x$

㉡ 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때 $f(x) = x$, $g(x) = x^3$

㉢ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = 1$, $g(-1) = -1$ 이므로 $f \neq g$

㉡ $f(-1) = g(-1) = -1$, $f(0) = g(0) = 0$,
$f(1) = g(1) = 1$ 이므로 $f = g$

㉢ $f(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq -2$인 모든 실수$\}$ 이고
$g(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq \pm 2$인 모든 실수$\}$ 이므로 $f \neq g$

따라서 $f = g$ 인 것은 ㉡ 뿐이다.

20. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x - 2,\ g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

㉡ $f(x) = |x|,\ g(x) = \sqrt{x^2}$

㉢ 정의역이 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$ 일 때,
$f(x) = x^3,\ g(x) = 2x^2 + x - 2$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠는 $x = 2$ 에서 다른 함수이나
㉡, ㉢는 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

21. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에서 $Y = \left\{ y \mid y\text{는실수} \right\}$ 로의 함수 $f(x) = x + 1$ 과 같은 함수 $g(x)$ 는?

① $g(x) = 2x + 1$ ② $g(x) = |x| + 1$ ③ $g(x) = x^2 + 1$
④ $g(x) = x^3 + 1$ ⑤ $g(x) = x^3 - 1$

해설

정의역과 공역이 같으므로 정의역에 속하는 모든 값에 대한 함숫값만 같으면 두 함수는 서로 같다.
$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 2$
① $g(-1) = -3$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$
② $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$
③ $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$
④ $g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2$ 이므로 $f = g$
⑤ $g(-1) = -2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

22. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{y|y$는 정수$\}$에 대하여 두 함수 $f,\ g$를 X에서 Y로의 함수로 정의한다. $f(x) = x-1,\ g(x) = ax^2+bx+c$라 할 때, $f = g$가 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc를 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f = g$에서
$f(-1) = g(-1),\ f(0) = g(0),\ f(1) = g(1)$이므로
$f(-1) = g(-1)$에서 $-2 = a-b+c \cdots$ ㉠
$f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots$ ㉡
$f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a+b+c \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a = 0,\ b = 1,\ c = -1$
$\therefore abc = 0$

23. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \le y \le 10\}$ 에 대하여 $f : X \to Y$, $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b\ (a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \le y \le 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

24. 집합 $X = \{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(-1) = 1 + k$

$f(1) = -1 + k$

$f(3) = -3 + k$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$\therefore X = \{1 + k,\ -1 + k,\ -3 + k\}$

그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로

$X = \{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서

$-3 + k = -1,\ -1 + k = 1,\ 1 + k = 3$

$\therefore k = 2$

25. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4$, $f(2) = 7$ 이므로
$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.
만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$
그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는
자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.
$\therefore f(3) = a^2 + 3a$, $f(k) = a^4$
$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$
$a^2 + 3a - 10 = 0$, $(a-2)(a+5) = 0$
$\therefore a = 2$($\because$ a는 자연수)
$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$
$\therefore k = 5$
$\therefore a+k = 2+5 = 7$

26. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$ ② $a > 2$ ③ $a < \frac{1}{2}$

④ $a > -\frac{1}{2}$ ⑤ $a < 2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases}$$ 이고

$x \geq 0$ 일 때 $f(x)$는 증가함수이므로

$x < 0$일 때도 $f(x)$는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1 - 2a > 0$

$\therefore\ a < \frac{1}{2}$

27. 다음 보기의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x - 3$ ㉡ $g(x) = x^2 + x$

㉢ $h(x) = |x| - 2$ ㉣ $k(x) = x^3$

① 0 개   ② 1 개   ③ 2 개   ④ 3 개   ⑤ 4 개

해설

㉠, ㉣은 증가함수이므로 일대일대응
㉡ $g(-2) = g(1) = 2$ 이므로
일대일대응이 아니다.
㉢ $h(-2) = h(2) = 0$ 이므로
일대일대응이 아니다.
그러므로 일대일대응인 것은 2 개이다.

28. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{5,\ 6,\ 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

해설

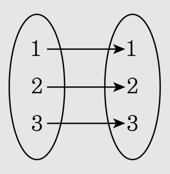
집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
$a=3\times3\times3=27$
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$b=3\times2\times1=6$
$\therefore a+b=27+6=33$

29. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 대해 X 에서 X 로의 함수 중 항등함수의 개수를 a, 상수함수의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 는 얼마인가?

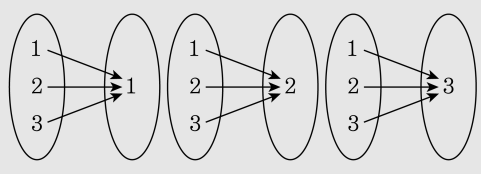
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

항등함수는 $1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3$ 의 한 가지가 있고,



상수함수의 경우는$(1, 2, 3) \to 1, (1, 2, 3) \to 2, (1, 2, 3) \to 3$ 의 3 가지가 있다.



$\therefore a + b = 4$

30. 집합 $A=\{1,2,3\}$ 와 $B=\{1,2,3,4\}$ 에서 A 에서 B로의 함수의 개수를 a, 일대일 함수의 개수를 b, 상수함수의 개수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

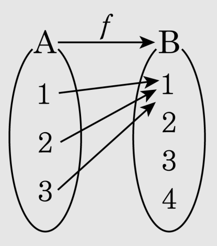
① 64 ② 32 ③ 128 ④ 92 ⑤ 48

해설

(1) 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 가능하게 3 번 선택하여 늘어놓는 경우와 같으므로
$\therefore\ a=4\times4\times4=64$

(2) 일대일 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 없이 3 번 선택하여 늘어놓는 경우이므로
$\therefore\ b=4\times3\times2=24$

(3) 상수함수의 개수 : 그림과 같이 1, 2, 3, 4 중 한 원소에만 대응되는 경우이므로
$\therefore c=4$



$\therefore\ a+b+c=92$

31. 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____________ 개

▷ 정답: 21 개

해설

X에서 X로의 함수의 총 개수에서
X에서 X로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
X에서 X로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
X에서 X로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
$\therefore\ \ 27 - 6 = 21$(개)

32. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 같을 때, 집합 X 의 개수를 구하면? (단, $X \neq \varnothing$)

① 1 개　② 3 개　③ 4 개　④ 7 개　⑤ 8 개

해설

$f(x) = g(x)$ 일 때, $f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면,
($h(x)$ 의 근의 개수) = (집합 X 의 개수)
$x^3 + 2x - 3x^2 = 0$
$x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$
$x = 0, 1, 2$
x 가 집합 X 의 원소이고 $X \neq \varnothing$ 이므로
집합 X 의 개수는 $2^3 - 1 = 7$(개)

33. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \to A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

① 2 가지 ② 3 가지 ③ 6 가지

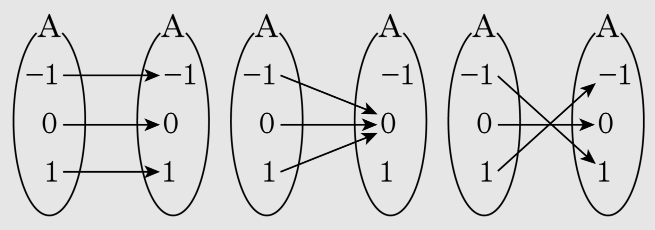
④ 8 가지 ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$

$\therefore f(0) = 0 \cdots$ ㉠

$f(-1) = -f(1) \cdots$ ㉡



㉠, ㉡을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

34. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$가 있다. 함수 $f : X \to Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개 ② 5 개 ③ 7 개 ④ 9 개 ⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면
$x = -1$ 일 때, $-f(-1) = k$
$x = 0$ 일 때, $0 \cdot f(0) = k$
$\therefore\ k = 0$
$x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서
$f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.
따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중
임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가
상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지
$\therefore\ 1 \times 5 \times 1 = 5$ (개)

35. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

36. 임의의 정수 k에 대하여 $f(k) = 2k - 1$이라 하고, 연산 $\diamond$를 $f(m)\diamond f(n) = f(2m+n)$로 정의한다. 이 때, $-3\diamond 5$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(m) = -3,\ f(n) = 5$라 하면
$2m - 1 = -3,\ 2n - 1 = 5$
$\therefore\ m = -1,\ m = 3$
$\therefore -3\diamond 5 = f(-1)\diamond f(3) = f(-2+3) = f(1) = 1$

37. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 임의의 양수 a, b에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(1) = 1$

② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③ $f\left(a^2\right) = 2f(a)$

④ $f\left(a^n\right) = nf(a)$

⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면
$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$
$\therefore\ f(1) = 0$

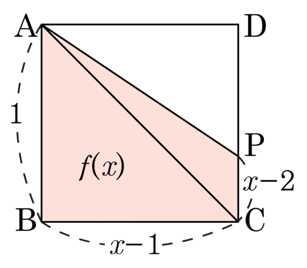
② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

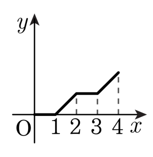
③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

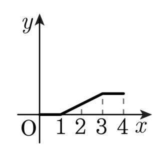
④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

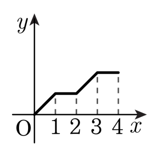
⑤ $ab = x,\ a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로
$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$
이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$
따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$는 감소함수

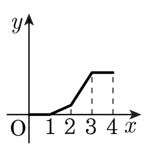
38. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

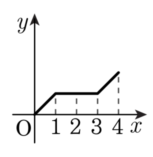


①


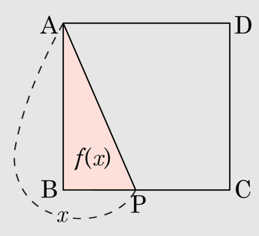
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

39. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x-2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는$a > 0$
② $-1 \le a \le 1$
③ $-2 < a < 2$
④ $a < -1$ 또는 $a > 1$
⑤ $a \ge 1$

해설

(i) $x \ge 2$ 일 때$f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$
(ii) $x < 2$ 일 때$f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$
함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로
$a < -1$ 또는 $a > 1$

40. 집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X\cup Y=U,\ X\cap Y=\varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U=\{1,2,3,4\}$ 에서 $X,\ Y\subset U,\ X\cup Y=U,$
$X\cup Y=\varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X)=n(Y)$
$n(X\cup Y)=n(U)=4,\ X\cup Y=\varnothing$ 이므로
$n(X)+n(Y)=4$ 이다.
$\therefore\ n(X)=n(Y)=2$
$X=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2\times6=12$

41. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$,
$\{3,\ 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3 = 8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$
따라서 $6 \times 6 = 36$ 개