1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$x = 1,\ x = -1$을 대입하면 성립하므로

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

$= (x-1)(x+1)(x^2 + x - 6)$

$= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ -1,\ 1,\ 2$

따라서 최대의 근은 2

2. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서

$x^2 = t$로 치환하면

$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$

$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

3. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

4. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서
$x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
$t(t - 2) - 3 = 0$,
$t^2 - 2t - 3 = 0$
$(t - 3)(t + 1) = 0$
$\therefore\ t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 3$
(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)^2 = 0$
$\therefore\ x = 1$ (중근)
따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

5. 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$ 이므로
켤레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해
$-1=(1-i)+(1+i)+\alpha \therefore \alpha=-3$
$p=(1-i)(1+i)-3(1-i)-3(1+i)$
$\therefore p=-4$
$-q=(1-i)(1+i)\cdot(-3)=-6$
$\therefore q=6$
$\therefore \ p+q=-4+6=2$

6. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$

$\therefore x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1$

$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

7. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$ ㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots ㉠, ㉡$

$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots ㉢$

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots ㉣$

$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots ㉤$

8. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$로 치환하면

$t^2 + t = 0,\ t(t+1) = 0$

$\therefore\ t = 0$ 또는 $t = -1$

(ⅰ) $x + \frac{1}{x} = 0$일 때, $x^2 + 1 = 0$

$\therefore x = \pm i$

(ⅱ) $x + \frac{1}{x} = -1$일 때,

$x^2 + 1 = -x,\ x^2 + x + 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore\ (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

9. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-\frac{8}{9}$ ⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+3ax-2a)=0$

i) 중근이 $x=1$인 경우

$x=1$을 $x^2+3ax-2a$에 대입하면 0이 된다.

$1+3a-2a=0$

$\therefore a=-1$

ii) $x^2+3ax-2a=0$이 중근을 갖는 경우

판별식 $D=9a^2+8a=0,\ a(9a+8)=0,$

$\therefore a=0,\ a=-\frac{8}{9}$

$-1+0-\frac{8}{9}=-\frac{17}{9}$