1. 다음을 연립부등식으로 나타낸 것 중 옳은 것은?

> 어떤 수 x 에서 4를 빼면 10 보다 작고, x 의 3 배에 3 를 더하면 22 보다 작지 않다.

① $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3>22 \end{cases}$

② $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3<22 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3\geq 22 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x-4>10 \\ 3x+3<22 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x+4<10 \\ 3x-3\geq 22 \end{cases}$

해설

$\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3\geq 22 \end{cases}$

문제의 뜻에 맞게 세운다.

2. 부등식 $-1 < -2x + 1 < 3$ 의 해를 구하면?

① $-2 < x < 2$　② $-2 < x < -1$　③ $-1 < x < 1$
④ $-1 < x < 2$　⑤ $1 < x < 2$

해설

$$-1 < -2x + 1 < 3 \rightarrow \begin{cases} -1 < -2x + 1 \\ -2x + 1 < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

$\therefore\ -1 < x < 1$

3. 부등식 $|x-2| \le 2x-1$을 풀면?

① $x \ge 2$ ② $x \ge -1$ ③ $1 \le x < 2$

④ $x \ge 1$ ⑤ $x < 2$

해설

(ⅰ) $x < 2$인 경우

$-x+2 \le 2x-1$

$3 \le 3x,\ 1 \le x$

이 범위에서의 해는 $1 \le x < 2$이다.

(ⅱ) $x \ge 2$인 경우

$x-2 \le 2x-1$

$-1 \le x$

이 범위에서 해는 $x \ge 2$이다.

따라서 x의 범위는 $x \ge 1$이다.

4. 이차부등식 $x^2-2x-8<0$의 해가 $a<x<b$일 때, $b-a$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$x^2-2x-8<0$ 에서 $(x-4)(x+2)<0$

$\therefore -2<x<4$

$b-a=6$

5. $2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le a$일 때, $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되기 위한 실수 a의 최솟값은? (단, $a \ge 1$)

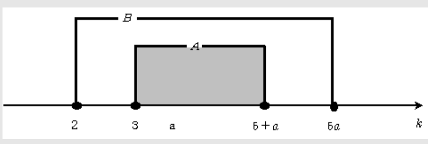
① 1　　② $\frac{8}{7}$　　③ $\frac{7}{6}$　　④ $\frac{5}{4}$　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$3 \le x+y \le 5+a,\ 2 \le xy \le 5a$이므로

$3 \le x+y \le 5+a,$

이때 $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되려면 다음 수직선에서



$5+a \le 5a$ 이어야 하므로 $4a \ge 5$

$\therefore a \ge \frac{5}{4}$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-3>-x+9 \\ 5x<4x+a \end{cases}$ 를 만족하는 자연수가 2개일 때, a의 값의 범위는?

① $3<a\le 4$ ② $3<a<4$ ③ $4\le a<5$
④ $4<a\le 5$ ⑤ $5<a\le 6$

해설

$3x-3>-x+9,\ x>3$
$5x<4x+a,\quad x<a$
$\therefore\ 3<x<a$
만족하는 자연수가 2개, 즉 4, 5 이므로 $5<a\le 6$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+4<a \\ x+7>5 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<6$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$\begin{cases} 2x+4<a \\ x+7>5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{a-4}{2} \\ x>-2 \end{cases}$

$-2<x<\dfrac{a-4}{2}$

$\dfrac{a-4}{2}=6$, $a-4=12$

$\therefore\ a=16$

8. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-2(k-4)x+2\ge 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k\le -2$　　② $-1\le k\le 2$　　③ $1\le k\le 8$
④ $2\le k\le 8$　　⑤ $k\le 8$

해설

x^2의 계수가 미지수 k이므로

ⅰ) $k=0$일 때 $8x+2\ge 0$에서 $x\ge -\frac{1}{4}$이므로
모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

ⅱ) $k\ne 0$일 때 $kx^2-2(k-4)x+2\ge 0$의 해가 모든 실수이려면
$k>0\cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-2k\le 0,\ k^2-10k+16\le 0,$
$(k-2)(k-8)\le 0\quad \therefore 2\le x\le 8\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\le k\le 8$
ⅰ), ⅱ)에서 $2\le k\le 8$이다.

9. 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $0<\alpha<x<\beta$ 일 때 부등식 $cx^2-bx+a>0$ 의 해는?

① $x<-\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x>-\frac{1}{\beta}$ ② $x<-\frac{1}{\beta}$ 또는 $x>\frac{1}{\alpha}$

③ $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$ ④ $\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}$

⑤ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\alpha<x<\beta$ 이므로

$a<0$ 이다. 해가 $0<\alpha<x<\beta$ 이고

이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

양변에 a 를 곱하면

$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$

$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta>0$

$\therefore\ b=-a(\alpha+\beta),\ c=a\alpha\beta$

따라서 $cx^2-bx+a>0$ 에 대입하면

$a\alpha\beta x^2+a(\alpha+\beta)x+a>0$

$\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$(\alpha x+1)(\beta x+1)<0$

$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$ $(\because 0<\alpha<\beta)$

10. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ x^2 + 2x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \le 0 \rightarrow (x-1)^2 \le 0$
$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로
만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일
$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$
$\rightarrow (x+1)^2 + 1 \ge 1$
$\therefore$ 모든 실수
$\therefore x = 1$

11. $\begin{cases} x^2-3x\le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x^2-3x\le 0$ 에서
$x(x-3)\le 0$ 이므로
$0\le x\le 3\cdots$ ㈎
$x^2-5x+4<0$ 에서
$(x-1)(x-4)<0$ 이므로
$1<x<4\cdots$ ㈏
㈎, ㈏에 의해
$1<x\le 3$ 이므로
$\alpha=1, \beta=3$
$\therefore \alpha+\beta=4$

12. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

13. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \geq 0$, $(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$　② $-3 < a < 8$　③ $-3 < a < 4$
④ $-2 < a < 12$　⑤ $-2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2-10x-24 \geq 0 \cdots \text{(가)} \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2) \geq 0 \\ \therefore x \leq -2\text{또는}x \geq 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가
존재하지 않으려면 다음 그림에서

$$\underbrace{-2 < a^2-a}_{\text{(다)}}\underbrace{\vphantom{a^2}\ < 12}_{\text{(라)}}$$

(다)에서

$a^2-a+2>0$, $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

$\therefore$ 모든 실수
(라)에서
$a^2-a-12<0$, $(a+3)(a-4)<0$
$\therefore -3<a<4$
따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면
$-3<a<4$

14. 이차방정식 $ax^2 - (a-3)x + a - 2 = 0$이 적어도 한 개의 정수근을 갖도록 하는 정수 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

이차방정식이므로 $a \neq 0$이고
실근을 가지므로
$D = (a-3)^2 - 4a(a-2) \geq 0$
$3a^2 - 2a - 9 \leq 0$
$\therefore \frac{1-\sqrt{28}}{3} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{28}}{3}$
$-1.\times\times\cdots \leq a \leq 2.\times\times\cdots$ 이므로
a의 정수값은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$
그런데 $a \neq 0$이고 $a = 1$일 때는 정수근이 없다.
$\therefore\ a = -1,\ 2$이고 구하는 합은 1

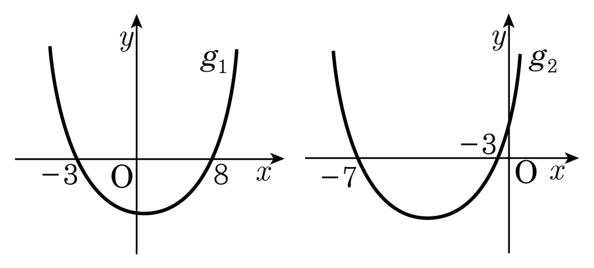
15. 이차방정식 $4x^2+8kx+8k-3=0$이 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k \le \frac{1}{2}$ 또는 $k \ge \frac{3}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ 또는 $k > \frac{3}{2}$
③ $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{2}$
⑤ 모든 실수

해설

$\frac{D}{4} \ge 0$에서 $(4k)^2-4(8k-3) \ge 0$
$16k^2-32k+12 \ge 0$
$4k^2-8k+3 \ge 0$
$(2k-3)(2k-1) \ge 0$
$\therefore\ k \le \frac{1}{2}$ 또는 $k \ge \frac{3}{2}$

16. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\dfrac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

17. 연립부등식 $\begin{cases} 1.2x - 2 \le 0.8x + 3.2 \\ 3 - \dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2} \\ 0.\dot{9}x \le 6 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \le b$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -9　② -5　③ -2　④ 2　⑤ 9

해설

i) $1.2x - 2 \le 0.8x + 3.2$,

$0.4x \le 5.2, \quad x \le 13$

ii) $3 - \dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면 $12 - (x-2) < 2(2x-3), \quad x > 4$

iii) $0.\dot{9}x \le 6$

$\dfrac{9}{9}x \le 6$

$x \le 6$

$\therefore \ 4 < x \le 6$

18. $a-1<x<a+1$ 을 만족하는 모든 x 가 $-1<x<3$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0<a<2$　② $0 \le a \le 2$　③ $a<0,\ a>2$
④ $a \le 0,\ a \ge 2$　⑤ 구할 수 없다.

해설
$a-1 \ge -1$ 이고, $a+1 \le 3$ 이어야 하므로
$a \ge 0,\ a \le 2$
$\therefore\ 0 \le a \le 2$

19. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{10-x}{4} \le a \\ 6x-5 \le 2x+1 \end{cases}$ 이 정수해를 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{10-x}{4} \le a,\ 10-x \le 4a, x \ge -4a+10$

$6x-5 \le 2x+1,\ 4x \le 6, x \le \dfrac{3}{2}$

정수해를 갖기 위해서는

$-4a+10 \le 1$

$\therefore a \ge \dfrac{9}{4}$

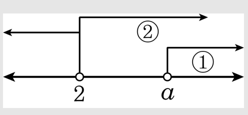
따라서 정수 a 의 최솟값은 3 이다.

20. 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x \le 2 \end{cases}$ 의 해가 없도록 하는 a 의 값 중 가장 작은 값은?

① -2　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$\begin{cases} x > a \\ x \le 2 \end{cases}$ 의 해가 없으려면



$x > a$ 는 ①이거나 ②이므로 $a \ge 2$
따라서 a 의 가장 작은 수는 2 이다.