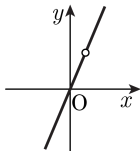
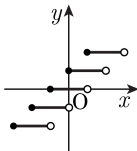


1. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x 에서 y 로의 함수인 것은?

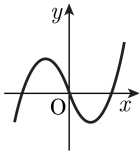
①



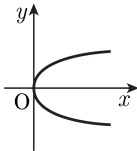
②



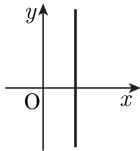
③



④



⑤



해설

- ①은 대응되지 못하는 x 의 값이 존재하고
 ②, ④, ⑤는 x 의 한 값에
 y 의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

a 에 대응하는 수가 b 에 대응해서는 안 되고
 a, b 에 대응하는 수가 c 에 대응해서는 안 되므로
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24(\text{개})$

3. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

4. 함수 $f(x) = ax + b (a > 0)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 이 함수 $f(x)$ 와 같을 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = 1, b = 0$

② $a = 1, b = 1$

③ $a = 2, b = 0$

④ $a = 2, b = 1$

⑤ $a = 3, b = 0$

해설

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ 에서 } f(f(x)) = x$$

$$f(f(x)) = af(x) + b$$

$$= a(ax + b) + b$$

$$= a^2x + ab + b$$

$$a^2x + ab + b = x$$

$$\therefore a^2 = 1, ab + b = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

5. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 3, g^{-1}(1) = 4$ 일 때, $f^{-1}(3) + g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2) = 3$ 에서 $f^{-1}(3) = 2$ 이고

$g^{-1}(1) = 4$ 에서 $g(4) = 1$ 이므로

$$f^{-1}(3) + g(4) = 2 + 1 = 3$$

6. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6

② -3

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

$$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} \text{의 우변을 통분하여 계산하면}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a-b=1, -2(a+b)=6$$

$$\therefore a=-1, b=-2$$

$$\therefore a+b=-1-2=-3$$

7. 함수 $y = \frac{x-6}{x-4}$ 의 정의역은 $x \neq a$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq b$ 인 모든 실수이다. 이때, $a - b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

함수 $y = \frac{x-6}{x-4}$ 의 정의역이 $x \neq a$ 인 모든 실수이고

치역이 $y \neq b$ 인 모든 실수이면 $x = a, y = b$ 는 점근선이다.

따라서 $y = \frac{(x-4)-2}{x-4} = \frac{-2}{x-4} + 1$ 에서

$a = 4, b = 1$ 이므로

$\therefore a - b = 4 - 1 = 3$

8. X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 가 성립하도록 하는 집합 X 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

두 함수가 같다는 것은 정의역의 임의의 x 값에 대하여 그 함수값이 같다는 것이다.

그러므로 $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 x 들만을 원소로 갖는 집합이 정의역이 된다.

$$\text{따라서 } 2x^2 - 3x + 4 = x^2 + x + 1, \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 3$$

따라서 1, 3을 원소로 갖는 집합을 구하면 된다.

즉, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$

9. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

10. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수 f^{-1} 가 $f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

즉 $f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow f(2) = 5$ 이다.

따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서

$$\therefore f(2) = 8a + b = 5$$

11. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 3

③ 6

④ 8

⑤ 11

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}, g(x) = 3x - 1 \quad g^{-1}(2) = a \text{ 라고 하면}$$

$$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$$

$$\therefore a = 1 \quad \therefore (f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$$

$$\therefore f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (\because 1 < 2)$$

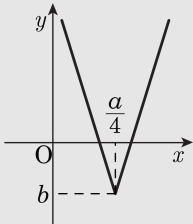
12. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4 \left(x - \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

13. 분수식 $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $-\frac{x-2}{x(x-1)}$

② $\frac{x+2}{x(x+1)}$

③ $\frac{x-2}{x(x+1)}$

④ $\frac{x+2}{x(x-1)}$

⑤ $\frac{x-2}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x+1} &= 1 - \frac{1}{x+1}, \\
 \frac{2x-1}{x-1} &= 2 + \frac{1}{x-1}, \\
 \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x} &= 3 + \frac{x+2}{x^2+x} \quad \text{이므로} \\
 (\text{준식}) &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) \\
 &\quad - \left(3 + \frac{x+2}{x^2+x}\right) \\
 &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x(x+1)} \\
 &= \frac{-x(x-1) + x(x+1) - (x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-x^2 + x + x^2 + x - x^2 - x + 2}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-x^2 + x + 2}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{-(x^2 - x - 2)}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{-(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= -\frac{x-2}{x(x-1)}
 \end{aligned}$$

14. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

▷ 정답 : $c = 3$

▷ 정답 : $d = 4$

▷ 정답 : $e = 5$

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$$

15. $x < 0$ 이고 $x^4 - x^2 + 1 = 0$ 일 때, $x + \frac{1}{x}$ 의 값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$

② $-\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{5}$

④ $-\sqrt{6}$

⑤ $-\sqrt{7}$

해설

$x^4 - x^2 + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 3$$

$$\therefore x < 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$$

16. 분수함수 $y = \frac{x+k-1}{x-1}$ ($k \neq 0$) 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 치역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.
- ② (1, 1)에 대하여 대칭이다.
- ③ $|k|$ 가 클수록 곡선은 (1, 1)에 가까워진다.
- ④ 점근선은 $x = 1, y = 1$ 이다.
- ⑤ $y = -x + 2$ 에 대하여 대칭이다.

해설

- ① 정의역은 $x \neq 1$ 인 실수, 치역은 $y \neq 1$ 인 실수
- ② 점근선의 교점인 (1, 1)에 대해 대칭이다.
- ③ $|k|$ 가 커질 수록 (1, 1)에 멀어진다.
- ⑤ 기울기가 ± 1 이고 (1, 1)을 지나는 직선에 대칭이다.

17. $\frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$

② $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

③ $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}$

④ $2\sqrt{2x}$

⑤ $2\sqrt{2x+1}$

해설

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x}) + (\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x})}{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x})} \\
 &= \frac{2\sqrt{2x+1}}{(2x+1) - 2x} \\
 &= 2\sqrt{2x+1}
 \end{aligned}$$

18. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{a}{b} = p + \sqrt{q}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2. \times \times \times$$

$$a = 2, b = \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore p = 1, q = 3$$

$$\therefore p + q = 4$$

19. $x = a + \frac{1}{a}$ 일 때, $\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 4}}$ 를 a 로 나타내면? (단, $0 < a < 1$)

① $\frac{a^2 + 1}{2}$
 ④ $\frac{a^2 - 1^2}{2a}$

② $\frac{a^2 - 1}{a}$
 ⑤ $\frac{a^2 + 1^2}{2a}$

③ $\frac{a^2 + 1}{2a}$

해설

$$x^2 - 4 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= \frac{a + \frac{1}{a}}{\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a - \frac{1}{a}\right)} \quad (\because 0 < a < 1) \\ &= \frac{a^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

20. $a^2 = 2 + \sqrt{3}$, $b^2 = 2 - \sqrt{3}$ 인 양수 a, b 에 대하여 $a^3 + b^3$ 의 값은?

① $2\sqrt{6}$

② $3\sqrt{3}$

③ $3\sqrt{6}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $4\sqrt{6}$

해설

$$a^2 b^2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

$$\therefore ab = 1 (\because ab > 0)$$

$$a^2 + b^2 = 4$$

$$\therefore (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 6$$

$$\therefore a + b = \sqrt{6} (\because a > 0, b > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

21. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동하면 점(1, 3)을 지난다. 이 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 3

해설

$y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼
평행 이동한 함수의 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(x-2)}$$

이것을 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 함수의
그래프의 식은 $y = \sqrt{a(-x-2)}$

이 때, 이 그래프가 점(1, 3)을 지나므로

$$3 = \sqrt{-3a}, -3a = 9$$

$$\therefore a = -3$$

22. 함수 $y = 1 - \sqrt{2-x}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$ 이다.

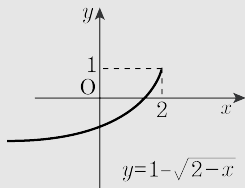
② 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$ 이다.

③ 그래프는 점 $(-2, -1)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

해설



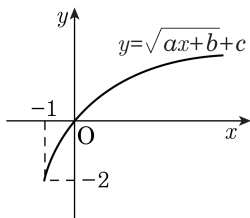
① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.

④ 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제 1, 3, 4사분면을 지난다.

23. 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의
그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼

평행이동한 것이므로

$$y = \sqrt{ax+b}+c$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{a(x+1)}-2$$

이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)}-2$

$$\therefore \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$y = \sqrt{4x+4}-2$$

$$\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$$

24. $a \leq x \leq 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x} + 1$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6 이다.
이때, $m - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x} + 1 = \sqrt{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)} + 1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$6 = \sqrt{3-2a} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$$

$$\therefore a = -11$$

또한, $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$m = \sqrt{3-2 \times 1} + 1 = 2$$

$$\therefore m - a = 13$$

25. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^{-1}(\sqrt{x+a}-1) = x+b$, $f(1) = 0$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f^{-1}(\sqrt{x+a}-1) = x+b \text{에서}$$

$$f(x+b) = \sqrt{x+a}-1$$

이 때, $f(1) = 0$ 이므로

위의 식에 $x = 1-b$ 를 대입하면

$$f(1-b+b) = \sqrt{1-b+a}-1$$

$$0 = \sqrt{1-b+a}-1, \sqrt{a-b+1} = 1$$

$$a-b+1 = 1$$

$$\therefore a-b = 0$$