1. 두 점 A(1, 5), $B(-3, -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$ ② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$

③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$ ④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$

⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

해설

원의 중심은 두 점 A, B 의 중점이므로,

$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2)$ 이다.

또, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

2. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$　② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$　④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) = 0$

$-4x + 4y + 6 = 0$

$\therefore\ 2x - 2y - 3 = 0$

3. 원 $x^2+y^2=4$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$ ② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$ ④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

4. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

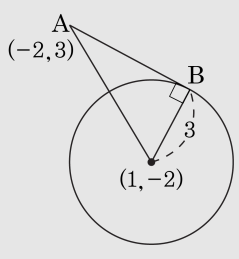
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



5. 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 A(1, −1), B(3, 5) 를 지나는 원의 반지름은 ?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로
구하는 원의 방정식의 중심을 $(a,\ a)$,
반지름을 r 라고 하면,
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$
이것이 A(1, −1), B(3, 5)를 지나므로
$(1-a)^2 + (-1-a)^2 = r^2 \cdots ①$
$(3-a)^2 + (5-a)^2 = r^2 \cdots ②$
① − ②을 하면, $16a - 32 = 0 \quad \therefore a = 2$
이것을 ① 에 대입하면, $r^2 = 10$
$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$
∴ 원의 반지름은 $\sqrt{10}$

6. 두 점 $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{B}(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π ② 16π ③ 25π ④ 36π ⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x,y)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2:3$
즉 $4\overline{\mathrm{PB}}^2 = 9\overline{\mathrm{PA}}^2$ 이므로
$4\left\{(x+2)^2+y^2\right\} = 9\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$
$x^2+y^2-14x+13=0$
$\therefore (x-7)^2+y^2=36$
따라서 점 P 는 중심이 $(7,\ 0)$ 이고,
반지름의 길이가 6 인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 넓이는 $\pi\cdot 6^2 = 36\pi$

7. 점 $(0,2)$를 지나고, 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선 중 기울기가 양수인 직선의 기울기는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(0,2)$를
지나는 접선은 $y=mx+2$
원의 중심 $(0,\,0)$에서 직선 $y=mx+2$까지의
거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\therefore m=\sqrt{3}\ (\because m>0\ )$

8. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x-a)^2 + (y-1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0-a)^2 + (-3-1)^2 = 25$
$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

9. 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 의 중심이 $(4,-2)$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 $(4,-2)$ 이므로
$(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$
$x^2+y^2-8x+4y+20-r^2=0 \quad \cdots$㉠
이때, 원 ㉠과 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 이 같으므로
$-2k=-8, \quad k=4$
$3k=20-r^2$
$\therefore k=4, \ r=2\sqrt{2} \ (\because r>0)$
따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

10. 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2-x+y-2=0$ ② $x^2+y^2-2x+3y-4=0$

③ $x^2+y^2+x-4y-5=0$ ④ $x^2+y^2+3x-y-1=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y-2=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$으로 놓으면
이 원이 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
$(-1)^2+(-1)^2+\mathrm{A}\cdot(-1)+\mathrm{B}\cdot(-1)+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}=2\cdots$㉠
$1^2+1^2+\mathrm{A}\cdot 1+\mathrm{B}\cdot 1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=-2\cdots$㉡
$0^2+1^2+\mathrm{A}\cdot 0+\mathrm{B}\cdot 1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{B}+\mathrm{C}=-1\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$\mathrm{A}=-1,\ \mathrm{B}=1,\ \mathrm{C}=-2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-x+y-2=0$

11. 방정식 $x^2+y^2-4x+2y+c=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c<1$ ② $c<2$ ③ $c<3$ ④ $c<4$ ⑤ $c<5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=5-c$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5-c \quad \leftarrow \quad 5-c=r^2$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$5-c>0 \quad \leftarrow \quad r^2>0$

$\therefore c<5$

12. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

13. 점 $(1,3)$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

원의 중심과 점 $(1,3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1}=3$

14. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a,b) 에서의 접선이 점 $(6,6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a,b) 에서의 접선의 방정식은
$ax+by=9$ 이고
이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로
$6a+6b=9 \quad \therefore a+b=\frac{3}{2}$
또, 점 (a,b) 는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서
$9=\frac{9}{4}-2ab \quad \therefore ab=-\frac{27}{8}$

15. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -12 ② -11 ③ -10 ④ -5 ⑤ -2

해설

접점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$2x - y = 5$

$\Rightarrow\ y = 2x - 5 \quad \therefore\ ab = -10$

16. $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=x\pm\sqrt{5}$ ② $y=2x\pm3\sqrt{5}$ ③ $y=4x\pm2\sqrt{5}$

④ $y=5x\pm5\sqrt{5}$ ⑤ $y=x\pm2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm3\sqrt{1+2^2}$ ← $m=2, r=3$

$\therefore y=2x\pm3\sqrt{5}$

17. 점$(3,-1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y=x+1$ 또는 $2x-y+1=0$

② $y=-x+2$ 또는 $4x+7y-1=0$

③ $y=-2x+5$ 또는 $x-2y-5=0$

④ $y=2x-6$ 또는 $x+5y-4=0$

⑤ $y=-3x+3$ 또는 $4x-2y-9=0$

해설

직선의 기울기를 m 이라 하면 이 직선은$(3,-1)$ 을 지나므로
$y=mx-3m-1$
또한 이 직선은 원의 접선이므로 대입하면
$x^2+m^2x^2+9m^2+1-6m^2x+6m-2mx=5$
$(m^2+1)x^2-2(3m^2+m)x+9m^2+6m-4=0$
이 방정식이 중근을 가져야 하므로
$(3m^2+m)^2-(m^2+1)(9m^2+6m-4)=0$
$9m^4+6m^3+m^2-9m^4-6m^3+4m^2-9m^2-6m+4=0$
$-4m^2-6m+4=0$
$2m^2+3m-2=0$
$\therefore (m+2)(2m-1)=0$
$\therefore m=-2$ 또는 $\frac{1}{2}$
따라서 접선의 방정식은
$y=-2x+5$ 또는 $x-2y-5=0$

18. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$
$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$
$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

19. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 = 5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$ 이고, 반지름의 길이는 5 이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소 거리는
d– (원의 반지름의 길이)$= 8 - 5 = 3$

20. 원 $x^2+y^2+4x-2y+2=0$과 중심이 같고 점 $(2,\ 3)$을 지나는 원의 넓이는?

① 12π ② 14π ③ 16π ④ 18π ⑤ 20π

해설

$x^2+y^2+4x-2y+2=0$을 변형하면
$(x+2)^2+(y-1)^2=3$이므로
원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 1)$
따라서, 중심이 $(-2,\ 1)$이고
반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$이고,
이 원이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$r=\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$
따라서, 이 원의 넓이는 $\pi r^2=20\pi$

21. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면
$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$
반지름의 길이가 1 이므로
㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$
$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$
$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$
따라서 합은 4 이다.

22. 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 과 중심이 같고 점 $(5,\ -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$
$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$
$\therefore$ 중심은 $(2,1)$ 이다.
$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$
$(5,\ -3)$ 을 지나므로 대입하면,
$(5-2)^2+(-3-1)^2=r^2 \quad r=5$
$\therefore \quad a+b+r=2+1+5=8$

23. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$　② $x^2+y^2+2x-2y=2$

③ $x^2+y^2-2x+2y=2$　④ $x^2+y^2-2x-2y=2$

⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{PA})^2=(x-2)^2+y^2$
$(\overline{PB})^2=x^2+(y-2)^2$
$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$
$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

24. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.

∴ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

25. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$ ② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$ ④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4} < 0$ 에서 $-b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$
$\therefore b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$