

1. 두 점 $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 52$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$

④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$

⑤ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 52$

해설

원의 중심은 두 점 A , B 의 중점이므로,

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2) \text{ 이다.}$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

2. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

3. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

4. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

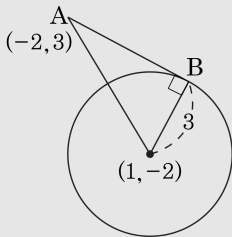
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



5. 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 $A(1, -1)$, $B(3, 5)$ 를 지나는 원의 반지름은 ?

① $\sqrt{7}$

② $2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{10}$

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $\sqrt{13}$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로

구하는 원의 방정식의 중심을 (a, a) ,

반지름을 r 라고 하면,

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$$

이것이 $A(1, -1)$, $B(3, 5)$ 를 지나므로

$$(1 - a)^2 + (-1 - a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

$$(3 - a)^2 + (5 - a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면, } 16a - 32 = 0 \quad \therefore a = 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면, $r^2 = 10$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

$\therefore$ 원의 반지름은 $\sqrt{10}$

6. 두 점 $A(3,0)$, $B(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π

② 16π

③ 25π

④ 36π

⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$$

$$\text{즉 } 4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2 \text{ 이므로}$$

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

따라서 점 P 는 중심이 $(7, 0)$ 이고,

반지름의 길이가 6인 원 위를 움직이므로

$$\text{구하는 자취의 넓이는 } \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$

7. 점 $(0, 2)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선 중 기울기가 양수인 직선의 기울기는?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 점 $(0, 2)$ 를
지나는 접선은 $y = mx + 2$

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = mx + 2$ 까지의
거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{즉, } \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\therefore m = \sqrt{3} \quad (\because m > 0)$$

8. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인

원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$

$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

9. 원 $x^2 + y^2 - 2kx + ky + 3k = 0$ 의 중심이 $(4, -2)$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 $(4, -2)$ 이므로

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - r^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

이때, 원 $\textcircled{7}$ 과 원 $x^2 + y^2 - 2kx + ky + 3k = 0$ 이 같으므로

$$-2k = -8, \quad k = 4$$

$$3k = 20 - r^2$$

$$\therefore k = 4, \quad r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

10. 세 점 P(-1, -1), Q(1, 1), R(0, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ ② $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$
③ $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$ ④ $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면
이 원이 세 점 P(-1, -1), Q(1, 1), R(0, 1)을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면

$$(-1)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C = 0$$

$$\therefore A + B - C = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0$$

$$\therefore A + B + C = -2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0$$

$$\therefore B + C = -1 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$A = -1, B = 1, C = -2$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$$

11. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c < 1$

② $c < 2$

③ $c < 3$

④ $c < 4$

⑤ $c < 5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 5 - c$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - c \quad \leftarrow \quad 5 - c = r^2$$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$$5 - c > 0 \quad \leftarrow \quad r^2 > 0$$

$$\therefore c < 5$$

12. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 ,$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

13. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1} = 3$

14. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$

② $-\frac{15}{8}$

③ $-\frac{7}{8}$

④ $\frac{5}{8}$

⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$ax + by = 9$ 이고

이 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지나므로

$$6a + 6b = 9 \quad \therefore a + b = \frac{3}{2}$$

또, 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 9$$

이때, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ 에서

$$9 = \frac{9}{4} - 2ab \quad \therefore ab = -\frac{27}{8}$$

15. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -12

② -11

③ -10

④ -5

⑤ -2

해설

접점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - y = 5$$

$$\Rightarrow y = 2x - 5 \quad \therefore ab = -10$$

16. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$

⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m=2, r=3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

17. 점(3, -1) 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y = x + 1$ 또는 $2x - y + 1 = 0$

② $y = -x + 2$ 또는 $4x + 7y - 1 = 0$

③ $y = -2x + 5$ 또는 $x - 2y - 5 = 0$

④ $y = 2x - 6$ 또는 $x + 5y - 4 = 0$

⑤ $y = -3x + 3$ 또는 $4x - 2y - 9 = 0$

해설

직선의 기울기를 m 이라 하면 이 직선은(3, -1) 을 지나므로
 $y = mx - 3m - 1$

또한 이 직선은 원의 접선이므로 대입하면

$$x^2 + m^2x^2 + 9m^2 + 1 - 6m^2x + 6m - 2mx = 5$$

$$(m^2 + 1)x^2 - 2(3m^2 + m)x + 9m^2 + 6m - 4 = 0$$

이 방정식이 중근을 가져야 하므로

$$(3m^2 + m)^2 - (m^2 + 1)(9m^2 + 6m - 4) = 0$$

$$9m^4 + 6m^3 + m^2 - 9m^4 - 6m^3 + 4m^2 - 9m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$-4m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\therefore (m + 2)(2m - 1) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } \frac{1}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = -2x + 5 \text{ 또는 } x - 2y - 5 = 0$$

18. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

19. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 (0, 4)이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 (0, 4) 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = 8 - 5 = 3$$

20. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$ 과 중심이 같고 점 $(2, 3)$ 을 지나는 원의 넓이는?

① 12π

② 14π

③ 16π

④ 18π

⑤ 20π

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$ 을 변형하면

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$ 이므로

원의 중심의 좌표는 $(-2, 1)$

따라서, 중심이 $(-2, 1)$ 이고

반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$r = \sqrt{(2 + 2)^2 + (3 - 1)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서, 이 원의 넓이는 $\pi r^2 = 20\pi$

21. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

22. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 과 중심이 같고 점 $(5, -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a + b + r$ 의 값은?
(단, a, b, r 은 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

$\therefore$ 중심은 $(2, 1)$ 이다.

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$$

$(5, -3)$ 을 지나므로 대입하면,

$$(5 - 2)^2 + (-3 - 1)^2 = r^2 \quad r = 5$$

$$\therefore a + b + r = 2 + 1 + 5 = 8$$

23. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$

② $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

③ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

④ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

⑤ $x^2 + y^2 + x - y = 2$

해설

$$(\overline{PA})^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$(\overline{PB})^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2 = 12$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$$

24. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

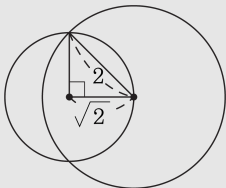
⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$x^2 + y^2 = 4, (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$$\therefore \text{현의 길이} : 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

25. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$

② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$

④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} < 0 \text{ 에서 } -b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$$

$$\therefore b < -2\sqrt{5} \text{ 또는 } b > 2\sqrt{5}$$