

1. 실수 전체의 집합을 정의역과 공역으로 하는 함수 f 가 $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$ 과 같을 때 $f(\sqrt{2}) + f(1-\sqrt{2})$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{2}$ 와 $1-\sqrt{2}$ 는 모두 무리수이므로,
 $f(\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$
 $f(1-\sqrt{2}) = 1-(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
 $\therefore f(\sqrt{2}) + f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1$

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

a, b, c 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a), f(b), f(c))$ 으로 나타내면
 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$
 $(3, 2, 1)$ 이므로
 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6개이다.

3. 함수 $f(x) = ||x - 2| - 1| + k$ 에 대하여 $f(-1) = 5$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1) = 5$ 이므로

$f(-1) = ||-1 - 2| - 1| + k = 2 + k = 5$

따라서 $k = 3$ 이므로

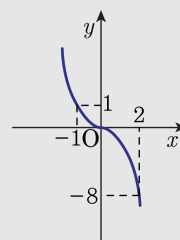
$\therefore f(5) = ||5 - 2| - 1| + 3 = 5$

4. 삼차함수 $y = -x^3$ 에 대하여 정의역이 $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$ 일 때, y 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② 5 ③ -5 ④ 7 ⑤ -7

해설

$y = -x^3$ 의 그래프는 다음 그림과 같고
 $x = 2$ 일 때 최솟이고, $x = -1$ 일 때 최대이므로
 $f(2) = -8$, $f(-1) = 1$ 에서 구하는 값은
 $f(2) + f(-1) = -8 + 1 = -7$



5. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 6x-5$ 를 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값은 얼마인가?

① -8

② -3

③ 1

④ 4

⑤ 9

해설

$f(2x+1) = 6x-5 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 에서
 $2x+1 = 4$ 를 만족시키는 x 의 값은

$$x = \frac{3}{2}$$

따라서, $x = \frac{3}{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$f(4) = 6 \times \frac{3}{2} - 5 = 4$$

6. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -3x - 4$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g) &= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ g) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ g) \\ &= (f^{-1} \circ g) \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3) &= (f^{-1} \circ g)(-3) \\ &= f^{-1}(g(-3)) \\ &= f^{-1}(5)\end{aligned}$$

이때, $f^{-1}(5) = k$ 라 하면 $f(k) = 5$

따라서 $2k + 3 = 5$ 에서 $k = 1$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3) = 1$$

7. 함수 $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = 3x^3$ 에 대하여 다음 <보기>에 있는 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것을 모두 고른 것은 ?

보기

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| I. $f(g(x))$ | II. $g(g(x))$ |
| III. $\{g(x)\}^2$ | IV. $\frac{g(x)}{f(x)}$ |

- ① I, II ② I, IV ③ II, III ④ II, IV ⑤ III, IV

해설

$f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ 에서

I. $F(x) = f(g(x))$ 로 놓으면

$$F(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$$

$$\therefore F(-x) = F(x)$$

II. $F(x) = g(g(x))$ 로 놓으면

$$F(-x) = g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x))$$

$$\therefore F(-x) = -F(x)$$

III. $F(x) = \{g(x)\}^2$ 로 놓으면

$$F(-x) = \{g(-x)\}^2$$

$$= \{-g(x)\}^2 = \{g(x)\}^2$$

$$\therefore F(-x) = F(x)$$

IV. $F(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 로 놓으면

$$F(-x) = \frac{g(-x)}{f(-x)} = -\frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\therefore F(-x) = -F(x)$$

따라서 원점에 대하여 대칭인 함수는 II, IV

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f : A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이라면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개