1. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=6$

① ㉠,㉡　　② ㉢,㉣　　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=-3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{2i}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=\sqrt{9}+(\sqrt{3}i)^2=0$

2. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2006}$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① -1 ② 1 ③ $-i$ ④ i ⑤ 2002

해설

$\dfrac{1+i}{1-i}$ 을 유리화 하면 $\dfrac{1+i}{1-i}=i$

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2006}=i^{2006}=(i^4)^{501}i^2=-1$

3. $x=1998,\ y=4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi}+\dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$\dfrac{x+yi}{y-xi}+\dfrac{y-xi}{x+yi}$

$=\dfrac{(x+yi)^2+(y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$=\dfrac{x^2+2xyi-y^2+y^2-2xyi-x^2}{(y-xi)(x+yi)}=0$

4. α, β 의 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\overline{\alpha - \beta i} = \overline{\alpha} - \overline{\beta} i$

㉡ $\overline{\alpha + \beta - 1} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + 1$

㉢ $\alpha \overline{\alpha}^2 + \alpha^2 \overline{\alpha}$ 는 실수이다.

㉣ $\alpha \overline{\beta} = 1$ 일 때, $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}} + \dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉣
④ ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\overline{\alpha} = a - bi$, $\overline{\beta} = c - di$ 라 하면

㉠ $\overline{\alpha - \beta i} = \overline{a + bi - (c + di)i}$
$= \overline{a + bi - ci - di^2}$
$= a + d - (b - c)i$

$\overline{\alpha} - \overline{\beta} i = (a - bi) - (c - di)i$
$= a - bi - ci + di^2$
$= a - d - (b + c)i$이므로 ㉠은 거짓

㉡ $\overline{\alpha + \beta - 1} = \overline{a + bi + c + di - 1}$
$= \overline{(a + c - 1) + (b + d)i}$
$= (a + c - 1) - (b + d)i$

$\overline{\alpha} + \overline{\beta} + 1 = a - bi + c - di + 1$
$= (a + c + 1) - (b + d)i$이므로
㉡은 거짓

5. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5$, $\bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

6. $z=\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4+z^2-\sqrt{2}z+1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}=\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$

$z^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\dfrac{2}{1-2i+i^2}=\dfrac{2}{-2i}=-\dfrac{1}{i}$

$=-\dfrac{i}{i^2}=i$

$\therefore\ z^4+z^2-\sqrt{2}z+1=i^2+i-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}+1$

$=-1+i-(1+i)+1=-1$

7. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

8. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

9. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$
$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot (m+4)=m^2-2m-15=0$
$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$
$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

10. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\frac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\frac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

11. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+a+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 하는 정수 a값들의 곱은?

① -7　② -4　③ -1　④ 2　⑤ 5

해설

$\alpha+\beta=1-a,\ \alpha\beta=a+1$

$\alpha\beta-1=1-\alpha-\beta$

$\alpha\beta+\alpha+\beta=2$

즉, $(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore (\alpha,\beta)=(0,2),(2,0),(-2,-4),(-4,-2)$

$\therefore a=-1$ 또는 7

12. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(c \neq 0)$의 두 근이 α, β일 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

> $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차항의 계수가
> 1인 이차방정식은 $x^2 + [(가)]x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$
> 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$
> 이므로 구하는 방정식은 $x^2 + [(나)]x + \frac{a}{c} = 0$
> 이것을 정리하면 $[(다)] = 0$이다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $-\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a
② $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2+bx+a
③ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $-\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a
④ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2+bx+a
⑤ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a

해설

(가)는 $-$(두 근의 합) 이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ $\therefore$ $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

$-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right) = -\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} \leftarrow$ (나)

$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$

$cx^2+bx+a=0 \leftarrow$ (다)

13. x에 관한 방정식 $\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1}$ 에서 두 근의 절대값은 같고 부호만 다를 때, m의 값은? (단, $a \neq \pm b$)

① ab ② $\frac{a+b}{a-b}$ ③ $\frac{a-b}{a+b}$ ④ $a+b$ ⑤ $a-b$

해설

$(m+1)(x^2-bx)=(m-1)(ax-c)$

$mx^2-bmx+x^2-bx=amx-cm-ax+c$

$(m+1)x^2+(a-b-am-bm)x+cm-c=0$의 두 근을 α,β라고 하면,

$\alpha+\beta=0$

$\therefore \frac{a-b-am-bm}{m+1}=0, \quad am+bm=a-b$

$m(a+b)=a-b, \ a\neq -b$이므로 $a+b\neq 0$

$\therefore m=\frac{a-b}{a+b}$

14. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

15. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠
$y = x + 1 \qquad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6