1. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

2. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2006}$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① -1 ② 1 ③ $-i$ ④ i ⑤ 2002

해설

$\frac{1+i}{1-i}$ 을 유리화 하면 $\frac{1+i}{1-i}=i$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2006}=i^{2006}=(i^4)^{501}i^2=-1$$

3. $x=1998,\ y=4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi}+\dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi}+\frac{y-xi}{x+yi}$$
$$=\frac{(x+yi)^2+(y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$
$$=\frac{x^2+2xyi-y^2+y^2-2xyi-x^2}{(y-xi)(x+yi)}=0$$

4. α, β 의 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\overline{\alpha - \beta i} = \overline{\alpha} - \overline{\beta} i$

㉡ $\overline{\alpha + \beta - 1} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + 1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha}$ 는 실수이다.

㉣ $\alpha\overline{\beta} = 1$ 일 때, $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}} + \dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\overline{\alpha} = a - bi$, $\overline{\beta} = c - di$ 라 하면

㉠ $$\begin{aligned}\overline{\alpha - \beta i} &= \overline{a + bi - (c + di)i} \\ &= \overline{a + bi - ci - di^2} \\ &= a + d - (b - c)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} - \overline{\beta} i &= (a - bi) - (c - di)i \\ &= a - bi - ci + di^2 \\ &= a - d - (b + c)i\end{aligned}$$ 이므로 ㉠은 거짓

㉡ $$\begin{aligned}\overline{\alpha + \beta - 1} &= \overline{a + bi + c + di - 1} \\ &= \overline{(a + c - 1) + (b + d)i} \\ &= (a + c - 1) - (b + d)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} + \overline{\beta} + 1 &= a - bi + c - di + 1 \\ &= (a + c + 1) - (b + d)i\end{aligned}$$ 이므로

㉡은 거짓

5. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

6. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1$ 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 = \frac{2}{1-2i+i^2} = \frac{2}{-2i} = -\frac{1}{i}$$

$$= -\frac{i}{i^2} = i$$

$$\therefore\ z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1 = i^2 + i - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} + 1$$

$$= -1 + i - (1+i) + 1 = -1$$

7. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

8. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

9. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$

$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot(m+4)=m^2-2m-15=0$

$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$

$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

10. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\frac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\frac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

11. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+a+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 하는 정수 a값들의 곱은?

① -7 ② -4 ③ -1 ④ 2 ⑤ 5

해설

$\alpha+\beta=1-a,\ \alpha\beta=a+1$

$\alpha\beta-1=1-\alpha-\beta$

$\alpha\beta+\alpha+\beta=2$

즉, $(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore (\alpha,\beta)=(0,2),(2,0),(-2,-4),(-4,-2)$

$\therefore a=-1$ 또는 7

12. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(c\neq 0)$의 두 근이 α,β일 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

> $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차항의 계수가
> 1인 이차방정식은 x^2+ [(가)]$x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$
> 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$
> 이므로 구하는 방정식은 x^2+ [(나)]$x+\frac{a}{c}=0$
> 이것을 정리하면 [(다)]$=0$이다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ -\frac{b}{c},\ cx^2-bx+a$
② $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ \frac{b}{c},\ cx^2+bx+a$
③ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ -\frac{b}{c},\ cx^2-bx+a$
④ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ \frac{b}{c},\ cx^2+bx+a$
⑤ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ \frac{b}{c},\ cx^2-bx+a$

해설

(가)는 $-$(두 근의 합)이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\ \therefore\ -\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

$$-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=-\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}\leftarrow \text{(나)}$$

$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$$

$$cx^2+bx+a=0\leftarrow \text{(다)}$$

13. x에 관한 방정식 $\dfrac{x^2-bx}{ax-c}=\dfrac{m-1}{m+1}$에서 두 근의 절대값은 같고 부호만 다를 때, m의 값은? (단, $a \neq \pm b$)

① ab ② $\dfrac{a+b}{a-b}$ ③ $\dfrac{a-b}{a+b}$ ④ $a+b$ ⑤ $a-b$

해설

$(m+1)(x^2-bx)=(m-1)(ax-c)$

$mx^2-bmx+x^2-bx=amx-cm-ax+c$

$(m+1)x^2+(a-b-am-bm)x+cm-c=0$의 두 근을 α,β라고 하면,

$\alpha+\beta=0$

$\therefore \dfrac{a-b-am-bm}{m+1}=0,\quad am+bm=a-b$

$m(a+b)=a-b,\ \ a\neq -b$이므로 $a+b\neq 0$

$\therefore m=\dfrac{a-b}{a+b}$

14. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D = a^2 - 12 > 0$에서

$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

15. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠
$y = x + 1 \qquad\quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore \; x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore \; (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$
$\therefore \; (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6