

1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k + i) - k(1 - i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k + i) - k(1 - i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3 + 2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0$, $3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i$, $\bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

2. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0 \text{)}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}(2-2xy)-(4x+y)i&=6-2i \\ 2-2xy&=6, \ 4x+y=2 \\ \text{연립하여 } x \text{에 대해 정리하면} \\ 2x^2-x-1&=0 \\ (x-1)(2x+1)&=0 \\ \therefore x&=1(x>0), \ y=-2\end{aligned}$$

3. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$ 의 값은? (단, n 은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

- ① $2i - 2$
- ② $2i + 2$
- ③ $2i - 4$
- ④ $2i + 4$
- ⑤ $4i - 2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i - 1) + (i^2 + 2) + (i^3 - 3) + \cdots + (i^{10} + 10) \\ &= (i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{10}) \\ &\quad + (-1 + 2 - 3 + \cdots + 10) \\ &= (i - 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ &= i + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\ &= (i + 4) + (-i - 11) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\ &= -7 + (1 + 12) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\ &= 6 + (i - 13) = i - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(10) + f(11) + f(12) + f(13) \\ &= (i + 4) + (-7) + 6 + (i - 7) = 2i - 4 \end{aligned}$$

4. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ -3

해설

$$x + y = 2, \quad xy = 3$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$$

5. $\alpha = 1+i$ 일 때, $\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\bar{a}+1}\right)}$ 의 값은? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

- ① $\frac{i}{3}$ ② i ③ $-i$ ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\bar{\alpha} = 1-i$ 를 대입하면

$$\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\bar{a}+1}\right)} = \overline{\left\{\frac{1-(1+i)}{(1+i)(1-i)+1}\right\}} = \overline{\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{i}{3}$$

6. 다음 등식을 만족하는 실수 x 의 값을 a , y 의 값을 b 라 할 때, $a+2b$ 의 값을 구하여라.

(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

$$\overline{(x+yi)}=\frac{5(1-i)}{2+i}=1-3i$$

$$x+yi=1+3i$$

$$a=1, \quad b=3$$

$$\therefore a+2b=7$$

7. 동수와 용제는 $\sqrt{-4}\sqrt{-9}$ 의 값을 아래와 같이 서로 다르게 계산하였다. 틀린 계산 과정에서 처음으로 등호가 성립하지 않는 곳을 고른 것은?

동수: $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{\textcircled{1}} \sqrt{4i}\sqrt{9i} \xrightarrow{\textcircled{2}} \sqrt{36i^2} \xrightarrow{\textcircled{3}} -6$

용제: $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{\textcircled{4}} \sqrt{(-4)(-9)} \xrightarrow{\textcircled{5}} \sqrt{36} \xrightarrow{\textcircled{6}} 6$

- ①

㉠
- ②

㉡
- ③

㉢
- ④

㉣
- ⑤

㉤

해설

$a > 0$ 일 때, $\sqrt{-a} = \sqrt{ai}$ 이다.
또, $a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다.

따라서 용제가 계산한 식 ㉣ 부분에서 처음으로 잘못되었다.

8. $|x - 1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x - 1| = 3 - |x|$ 에서,
 $|x| + |x - 1| = 3$ 이다.
i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - (x - 1) = 3$
 $\therefore x = -1$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - (x - 1) = 3$
 $0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능
iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $x + (x - 1) = 3$
 $\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는
 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

9. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

- ① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식
- ② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식
- ③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

10. x 에 대한 방정식 $ix^2 + (1+i)x + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$ 를 곱하면

$$(-i) \cdot ix^2 - i(1+i)x - i = 0$$

$$x^2 + (1-i)x - i = 0$$

$$(x-i)(x+1) = 0$$

$$x \neq i \text{이므로 } x = -1$$

11. $x^2 + 3ax + b = 0$ 과 $x^2 - ax + c = 0$ 은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$ 가 최소가 되는 a 의 값은 ?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

조건에서

$$1 + 3a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - a + c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 4a + b - c = 0$$

$$\therefore b - c = -4a$$

$$\therefore 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a - 1)^2 - 2$$

따라서 $a = 1$ 일 때, 최소이다.

12. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

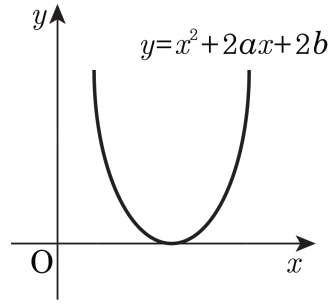
$$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$$

$$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$$

$$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
 ② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
 ③ 중근을 갖는다.
 ④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
 ⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b - 1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

14. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0 \\ \therefore x &= 2, y = 4 \\ \therefore x + y &= 6 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= 0 \text{이 실근을 가지므로} \\ D/4 &= 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0 \\ y^2 - 8y + 16 &\leq 0 \\ (y - 4)^2 &\leq 0, y = 4 \\ \text{준식에 대입하면 } x &= 2 \\ \text{따라서 } x + y &= 6 \end{aligned}$$

15. x 에 대한 2차 방정식 $x^2 - 2ax + a^2 + ka - 2k + b = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 2

④ -2

⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$$\Rightarrow D' = a^2 - (a^2 + ka - 2k + b) = 0$$

$$-ka + 2k - b = 0$$

$$k(2 - a) - b = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad b = 0 \quad a + b = 2$$

16. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

- ① 1
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ 2
- ④ $\frac{5}{2}$
- ⑤ 3

해설

(주어진 식)=0이라 놓고 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$$

근의 공식에서

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2} \\ &= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

주어진 식이 x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식(= D) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

17. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값은?

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 20

해설

근과 계수와의 관계로부터

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 27 - 9 = 18$$

18. 이차방정식 $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

- ① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}, \quad \alpha\beta = -2$$

문제의 조건에서 $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

$$\therefore 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9, \quad 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서, a 의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

19. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$$a=2, b'=-2, c=3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

20. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1 \pm \sqrt{6}$ 을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}, 1$ 을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.

갑이 푼 이차식을 $a'x^2 + bx + c = 0$ 라 하면

$$-\frac{b}{a'} = 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = 2,$$

$$\frac{c}{a'} = (1 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = -5 \text{ 이므로}$$

갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면

$x^2 - 2x - 5 = 0$ 의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.

같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면

$$-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \frac{c'}{a} = -\frac{1}{3} \text{ 으로}$$

$3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 실수배임을 알 수 있다.

b 값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b 값이 일치하므로

$a = 3, c = -5$ 임을 알 수 있고 b 는 -2 임을 알 수 있다.

따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$ 이다.