1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

2. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0\text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$

$2-2xy=6,\ 4x+y=2$

연립하여 x에 대해 정리하면

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=1(x>0),\ y=-2$

3. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$이다.)

① $2i-2$ ② $2i+2$ ③ $2i-4$

④ $2i+4$ ⑤ $4i-2$

해설

$$
\begin{aligned}
f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\
&= (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}) \\
&\quad + (-1+2-3+\cdots+10) \\
&= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\
&= i+4 \\
f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\
&= (i+4) + (-i-11) = -7 \\
f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\
&= -7 + (1+12) = 6 \\
f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\
&= 6 + (i-13) = i-7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\therefore f(10)+f(11)+f(12)+f(13) \\
&\quad = (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4
\end{aligned}
$$

4. $x = 1 + \sqrt{2}i,\ y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

5. $\alpha = 1+i$ 일 때, $\overline{\left(\dfrac{1-\alpha}{a\overline{a}+1}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{i}{3}$　　② i　　③ $-i$　　④ $1+i$　　⑤ $1-i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\overline{\alpha} = 1-i$ 를 대입하면

$$\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\overline{a}+1}\right)} = \overline{\left\{\frac{1-(1+i)}{(1+i)(1-i)+1}\right\}} = \overline{\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{i}{3}$$

6. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$

$(\overline{x+yi}) = \dfrac{5(1-i)}{2+i} = 1-3i$

$x+yi = 1+3i$

$a = 1,\ \ b = 3$

$\therefore\ \ a+2b = 7$

7. 동수와 용제는 $\sqrt{-4}\sqrt{-9}$ 의 값을 아래와 같이 서로 다르게 계산하였다. 틀린 계산 과정에서 처음으로 등호가 성립하지 않는 곳을 고른 것은?

동수 : $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{㉠} \sqrt{4}i\sqrt{9}i \xrightarrow{㉡} \sqrt{36}i^2 \xrightarrow{㉢} -6$

용제 : $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{㉣} \sqrt{(-4)(-9)} \xrightarrow{㉤} \sqrt{36} \xrightarrow{㉥} 6$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$a > 0$ 일 때, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 이다.
또, $a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다.

따라서 용제가 계산한 식 ㉣ 부분에서 처음으로 잘못되었다.

8. $|x-1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x-1| = 3 - |x|$에서,

$|x| + |x-1| = 3$이다.

i) $x < 0$일 때,

$-x-(x-1) = 3$

$\therefore x = -1$

ii) $0 \le x < 1$일 때,

$x-(x-1) = 3$

$0 \cdot x + 1 = 3$이므로 불능

iii) $x \ge 1$일 때,

$x+(x-1) = 3$

$\therefore x = 2$

따라서 구하는 해는

$x = -1$ 또는 $x = 2$이다.

9. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가) 를 계수로 갖는 이차방정식은 (나) 의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다) 를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라) 의 범위에서는 반드시 (마) 의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

10. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2-i(1+i)x-i=0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

11. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은 ?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

조건에서

$1+3a+b=0 \cdots$ ㉠

$1-a+c=0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ : $4a+b-c=0$

$\therefore\ b-c=-4a$

$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$

따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

12. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

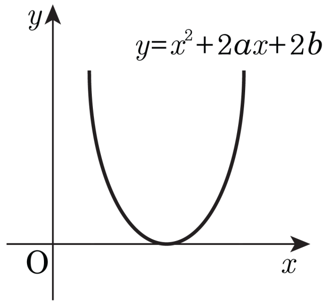
$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\dfrac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

14. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0$

$\therefore \ x = 2, \ y = 4$

$\therefore \ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y - 4)^2 \leq 0, \ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

15. x에 대한 2차 방정식 $x^2-2ax+a^2+ka-2k+b=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 2 ④ -2 ⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = a^2 - (a^2 + ka - 2k + b) = 0$

$-ka + 2k - b = 0$

$k(2-a) - b = 0$

$\therefore \quad a = 2 \quad b = 0 \quad a + b = 2$

16. 이차식 $x^2-xy-2y^2-ax-3y-1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

(주어진 식)$=0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2-(a+y)x-(2y^2+3y+1)=0$

근의 공식에서

$$x=\frac{a+y\pm\sqrt{(a+y)^2+4(2y^2+3y+1)}}{2}$$

$$=\frac{a+y\pm\sqrt{9y^2+2(a+6)y+a^2+4}}{2}$$

주어진 식이 x, y에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(=D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D=9y^2+2(a+6)y+a^2+4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2+4)=-8a^2+12a=0$$

$$\therefore\ a=0 \text{ 또는 } a=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

17. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 20

해설

근과 계수와의 관계로부터

$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 27 - 9 = 18$

18. 이차방정식 $ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta=-\frac{a-3}{a}$, $\alpha\beta=-2$

문제의 조건에서 $|\alpha-\beta|=\sqrt{17}$

$$\therefore\ 17=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\left(\frac{a-3}{a}\right)^2+8$$

$$\therefore\ \left(\frac{a-3}{a}\right)^2=9,\ 8a^2+6a-9=0$$

따라서, a의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

19. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a = 2, b' = -2, c = 3$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

20. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1\pm\sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2+bx+c=0$라 하면

$-\frac{b}{a'}=1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}=2,$

$\frac{c}{a'}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$이므로

갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2-2x-5=0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면

$-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}, \frac{c'}{a}=-\frac{1}{3}$으로

$3x^2-2x-1=0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a=3,\ c=-5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.

따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.