1. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$	㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근

㉡ $a=1, b'=1, c=4$

$1^2-1\cdot 4=-3<0$: 허근

㉢ $a=1, b'=2, c=2$

$2^2-1\cdot 2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$이 중근을 가지도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ 0　④ -2　⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + (k + 2) = 0$

$\frac{D}{4} = (-1)^3 - (k + 2) = 0$

$1 - k - 2 = 0 \quad \therefore \quad k = -1$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$ ② $a<\frac{3}{2}$ ③ $a<\frac{3}{4}$ ④ $a>\frac{3}{4}$ ⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6a+9$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

4. 이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 허근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k>4$

해설

$\frac{D}{4}=2^2-k<0$

$\therefore\ k>4$

5. 이차방정식 $x^2 + 8x + 2k = 0$이 허근을 가지도록 하는 정수 k의 값의 최솟값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$\frac{D'}{4} < 0$이어야 하므로,

$16 - 2k < 0,\ 2k > 16,\ \therefore\ k > 8$

$\therefore$ 정수 k의 최소값은 9

6. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
$D = (k-4)^2 - 4(k-1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
$(k-2)(k-10) = 0$
따라서, $k = 2$, $k = 10$이므로 k의 값은 12이다.

7. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore\ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore\ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

8. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D=(a+2)^2-4=0$이므로
$a^2+4a+4-4=a^2+4a=0$
따라서 $a=0$ 또는 $a=-4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

9. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$
④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.
$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$
$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$
모든 k 에 대해 성립하려면
$-2a = 0,\ a^2 - b + 3 = 0$
$\therefore \quad a = 0, b = 3$

10. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(ⅰ) $a = 0$ 일 때 : $x = \dfrac{a+2}{2}$

(ⅱ) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

11. x에 관한 이차방정식 $(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$ 이 중근을 갖도록 하는 m의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$

(i) 이차방정식이므로 $m^2-1\neq 0$

$\therefore\ m\neq 1,-1$

(ii) 중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m^2-1)=0$

$m^2-2m+1-3m^2+3=0$

$m^2+m-2=0$

$(m+2)(m-1)=0$

$\therefore\ m=1,-2$

$\therefore$(i)과 (ii)에서 $m=-2$일 때만 중근을 갖는다.

12. 이차방정식 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$이 중근을 가질 조건을 구하면?(단, $a \neq b$)

① $a=b+c$ ② $2a=b+c$ ③ $a=b-c$

④ $2a=b-c$ ⑤ $2a=2b-c$

해설

$$
\begin{aligned}
D &= (b-c)^2-4(a-b)(c-a) \\
&= b^2+c^2-2bc-4(ac-a^2-bc+ab) \\
&= 4a^2+b^2+c^2-4ac+2bc-4ab \\
&= (2a-b-c)^2
\end{aligned}
$$

준식이 중근을 가져야 하므로

$D=0$이어야 한다.

따라서, $(2a-b-c)^2=0,\ \ 2a-b-c=0$

$\therefore 2a=b+c$

13. x 에 대한 두 이차방정식
$x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a+1) = 0 \cdots$ ㉠
$x^2 - 2ax - b = 0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.
② 중근을 가진다.
③ 서로 다른 두 허근을 가진다.
④ 판별할 수 없다.
⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = b - (2a+1) > 0 \therefore\ b > 2a+1$
㉡의 판별식을 D' 이라 하면
$\frac{D'}{4} = a^2 + b > a^2 + 2a + 1$
$= (a+1)^2 \geq 0$
$\therefore\ \frac{D'}{4} > 0$
따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

14. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

15. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

16. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}$ ······ ㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

17. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

18. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

19. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b의 값은?

① $a=1,\ b=1$　② $a=1,\ b=0$
③ $a=0,\ b=1$　④ $a=-1,\ b=0$
⑤ $a=-1,\ b=-1$

해설

$\frac{D}{4}=0$이므로,
$(k-a)^2-(k^2+a^2-b+1)=0$
$-2ak+(b-1)=0$
$\therefore\ a=0, b=1$

20. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 $a,\ b,\ c$ 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ $a=b$ 인 이등변삼각형

④ $b=c$ 인 이등변삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,
$(a-c)x^2+2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$D=0$ 이어야 하므로
$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$
즉 $b^2-a^2+c^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

21. x에 대한 이차식 $a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$이 완전제곱식일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① a를 빗변으로 하는 직각삼각형

② b를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ c를 빗변으로 하는 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(c-a)x^2-2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$c-a \neq 0$이고, $\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=b^2-(c-a)(c+a)=0$$

$b^2-(c^2-a^2)=0, \quad b^2-c^2+a^2=0$

$\therefore c^2=b^2+a^2$

따라서 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

22. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형