

1. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2 - 6x + 1 = 0$

② $x^2 - 6x + 1 = 0$

③ $x^2 - 7x + 3 = 0$

④ $2x^2 + 6x - 1 = 0$

⑤ $2x^2 - 7x + 3 = 0$

해설

근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = \frac{6}{2} = 3, \alpha\beta = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

3 과 $\frac{1}{2}$ 을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로

두 근의 합: $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore a = -2$

두 근의 곱: $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore b = 2$

$\therefore a + b = -2 + 2 = 0$

3. 이차방정식 $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3} + 3)x + 3 = 0$ 의 두 근을 a, b 라 할 때, $a \times b$ 의 값은?

① $-\sqrt{3}$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{3}$ 을 곱하면

$$3x^2 - (3 + 3\sqrt{3})x + 3\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - (1 + 3)x + \sqrt{3} = 0$$

$$(x - 1)(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore a \times b = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

4. $x^2 - 4kx + (5 - k^2) = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$D/4 = 4k^2 - (5 - k^2) \geq 0$$

$$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0, 5k^2 \geq 5, \therefore k^2 \geq 1$$

$$\alpha + \beta = 4k, \quad \alpha\beta = 5 - k^2$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 16k^2 - 10 + 2k^2$$

$$= 18k^2 - 10$$

$$18k^2 \geq 18, 18k^2 - 10 \geq 18 - 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 8, \therefore (\text{최솟값}) = 8$$

5. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2k^2 - k = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, k 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}, -1$

② $-\frac{3}{2}, 1$

③ $\frac{3}{2}, 1$

④ $\frac{1}{2}, -3$

⑤ $-\frac{1}{2}, 3$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서 두근의 차는 $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$

∴ 주어진 방정식의 두근의 차는

$$\sqrt{16 - 8k^2 + 4k} = 2$$

$$4k - 8k^2 + 16 = 4$$

$$2k^2 - k - 3 = 0$$

$$(k + 1)(2k - 3) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

6. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i$, $3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i$, $2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left| \frac{bc}{a^2} \right|$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

$$\text{두 근의 곱} = \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

$$\text{두 근의 합} = -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$$

$$\therefore \left| \frac{bc}{a^2} \right| = \left| \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} \right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$$

7. 이차방정식 $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근의 차이가 $\sqrt{17}$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$

② $-\frac{3}{4}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{9}{4}$

⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}, \quad \alpha\beta = -2$$

문제의 조건에서 $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

$$\therefore 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9, \quad 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서, a 의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

8. x 의 이차방정식 $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - m - 2 = 0$ 의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$D = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0$ 이므로
서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 근을 α , 2α 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = -(2m - 1) > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$m < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, ㉠에서의 $\alpha = \frac{1 - 2m}{3}$ 을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4, 5$

조건 ㉢에 의해서 $m = -4$

9. $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이 a 이고, $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 b, c 일 때, $b^3 + c^3$ 의 값은 ?

① -1

② 1

③ -2

④ 27

⑤ 0

해설

a 는 $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이므로

$$a^3 - 3a + 2 = 0$$

b, c 는 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$b + c = a, \quad bc = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore b^3 + c^3 &= (b + c)^3 - 3bc(b + c) \\ &= a^3 - 3a = -2\end{aligned}$$