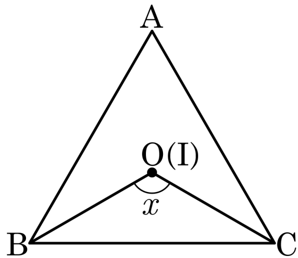
1. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 외심 O 와 내심 I 가 일치하는 그림이다. 빈 칸을 채워 넣는 말로 적절한 것은?



$\triangle ABC$ 의 외심과 내심이 일치할 때에 $\triangle ABC$ 는 (   ) 이고, $\angle BOC = (\quad)^\circ$ 이다.

① 직각삼각형, 90
② 직각삼각형, 120
③ 이등변삼각형, 60
④ 정삼각형, 90
⑤ 정삼각형, 120

해설

$\triangle ABC$ 의 외심과 내심이 일치할 때는 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.
$\angle A = 60^\circ$ 이고, 점 O 가 외심일 때, $2\angle A = \angle BOC$ 이므로 $\angle BOC = 120^\circ$ 이다.
따라서 $x = 120^\circ$ 이다.

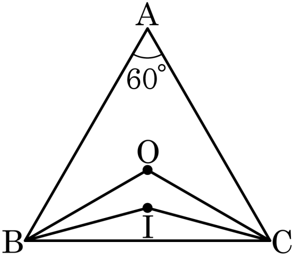
2. 다음 중 내심과 외심이 일치하는 삼각형은?

① 직각삼각형 ② 예각삼각형 ③ 둔각삼각형
④ 정삼각형 ⑤ 이등변삼각형

해설

내심과 외심이 일치하는 삼각형은 정삼각형이다.

3. 다음 그림에서 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심이고, 점 I 는 $\triangle OBC$ 의 내심이다. $\angle A = 60°$ 일 때, $\angle BIC - \angle BOC$ 의 크기는?



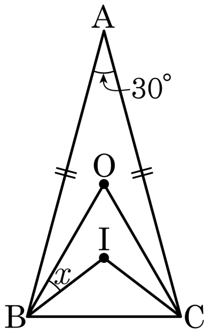
① $0°$ ② $10°$ ③ $20°$ ④ $30°$ ⑤ $40°$

해설

$\triangle ABC$ 의 외심이 점 O 일 때, $\frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$, $\angle A = 60°$ 이므로 $\angle BOC = 120°$ 이다.

$\triangle OBC$ 의 내심이 점 I 일 때, $\frac{1}{2}\angle BOC + 90° = \angle BIC$ 이므로 $\angle BIC = \frac{1}{2} \times 120° + 90° = 150°$ 이다. 따라서 $\angle BIC - \angle BOC = 150° - 120° = 30°$ 이다.

4. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다. $\triangle ABC$ 의 외심과 내심이 각각 점 O, I 이고, $\angle A = 30°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?



① 15 ② 22.5 ③ 25 ④ 27.5 ⑤ 30

해설

$\triangle ABC$ 의 외심이 점 O 일 때,

$\frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$, $\angle A = 30°$ 이므로

$\angle ABC = 75°$, $\angle BOC = 60°$ 이다.

$\triangle ABC$ 의 내심이 점 I 일 때,

$\frac{1}{2}\angle A + 90° = \angle BIC$ 이므로

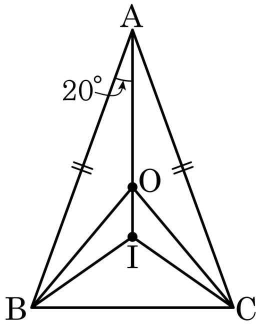
$\angle BIC = \frac{1}{2} \times 30° + 90° = 105°$ 이다.

$\triangle OBC$ 도 이등변삼각형이므로 $\angle OBC = 60°$ 이다.

또, $\angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \times 75° = 37.5°$ 이다.

따라서 $\angle OBI = \angle OBC - \angle IBC = 60° - 37.5° = 22.5°$ 이다.

5. 다음 그림과 같은 이등변삼각형 ABC 에서 외심을 O , 내심을 I 라 할 때 $\angle OBI$ 의 크기는?



① 10° ② 15° ③ 20° ④ 25° ⑤ 30°

해설

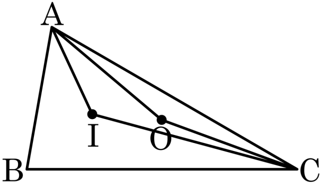
$\triangle ABC$ 의 외심이 점 O 일 때, $\frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$, $\angle A = 40°$ 이므로 $\angle ABC = 70°$, $\angle BOC = 80°$ 이다.

$\triangle ABC$ 의 내심이 점 I 일 때, $\frac{1}{2}\angle A + 90° = \angle BIC$ 이므로 $\angle BIC = \frac{1}{2} \times 40° + 90° = 110°$ 이다.

$\triangle OBC$ 도 이등변삼각형이므로 $\angle OBC = 50°$ 이다.

또, $\angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$ 이다. 따라서 $\angle OBI = \angle OBC - \angle IBC = 50° - 35° = 15°$ 이다.

6. 다음 그림에서 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심, 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이다. $\angle AOC + \angle AIC = 290°$ 일 때, $\angle AIC$ 의 크기는?



① 160° ② 120° ③ 125° ④ 130° ⑤ 140°

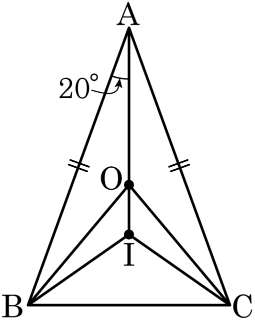
해설

$\triangle ABC$ 의 외심이 점 O 일 때, $\frac{1}{2}\angle AOC = \angle B$, $\triangle ABC$ 의 내심이 점 I 일 때, $\frac{1}{2}\angle B + 90° = \angle AIC$ 이므로

$\angle AOC + \angle AIC = 2\angle B + \frac{1}{2}\angle B + 90° = 290°$ 일 때, $\angle B = 80°$ 이다.

따라서 $\angle AIC = \frac{1}{2}\angle B + 90° = 40° + 90° = 130°$ 이다.

7. 다음 그림과 같은 이등변삼각형 ABC 에서 점 I 와 점 O 는 각각 $\triangle ABC$ 의 내심과 외심이다. $\angle BAO = 20^\circ$ 일 때, $\angle BIC - \angle BOC$ 의 크기는?



① 30° ② 40° ③ 50° ④ 60° ⑤ 70°

해설

$\triangle ABC$ 의 외심이 점 O 일 때, $\frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$,$\angle A = 40^\circ$ 이므로

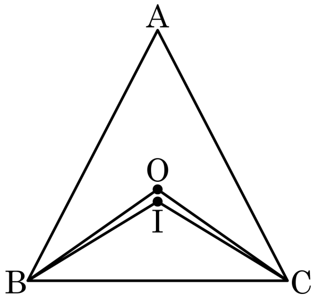
$\angle ABC = 70^\circ$, $\angle BOC = 80^\circ$ 이다.

$\triangle ABC$ 의 내심이 점 I 일 때, $\frac{1}{2}\angle A + 90^\circ = \angle BIC$ 이므로

$\angle BIC = \frac{1}{2} \times 40^\circ + 90^\circ = 110^\circ$ 이다.

따라서 $\angle BIC - \angle BOC = 110^\circ - 80^\circ = 30^\circ$ 이다.

8. 다음 그림에서 삼각형 ABC 의 외심과 내심이 각각 O, I 이고 $\angle BOC = 110°$ 일 때, $\angle BIC + \angle A$ 의 크기는 몇 도인가?



① $166°$ ② $168.5°$ ③ $170°$

④ $172.5°$ ⑤ $178°$

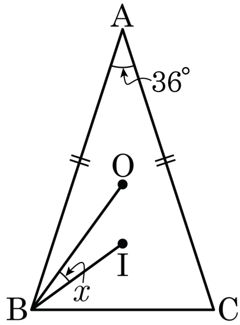
해설

$\triangle ABC$ 의 외심이 점 O 일 때, $\frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$ 이므로 $\angle BOC = 110°$, $\angle A = 55°$ 이다.

$\triangle ABC$ 의 내심이 점 I 일 때, $\frac{1}{2}\angle A + 90° = \angle BIC$ 이므로 $\angle BIC = \frac{1}{2} \times 55° + 90° = 117.5°$ 이다.

따라서 $\angle BIC + \angle A = 117.5° + 55° = 172.5°$ 이다.

9. 다음 그림에서 점 I 와 점 O 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형의 내심과 외심일 때 $\angle x$ 의 크기는?



① 14° ② 18° ③ 20° ④ 22° ⑤ 24°

해설

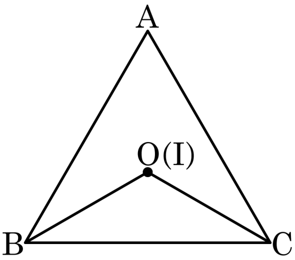
$\triangle$ABC 의 외심이 점 O 일 때, $\frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$ 이므로 $\angle A = 36°$, $\angle BOC = 72°$ 이다.

$\triangle$ABC 의 내심이 점 I 일 때, $\frac{1}{2}\angle A + 90° = \angle BIC$ 이므로 $\angle BIC = \frac{1}{2} \times 36° + 90° = 108°$ 이다.

$\triangle$OBC 도 이등변삼각형이므로 $\angle OBC = 54°$ 이다.

또, $\angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \times 72° = 36°$ 이다. 따라서 $\angle OBI = \angle OBC - \angle IBC = 54° - 36° = 18°$ 이다.

10. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 외심 O 와 내심 I 가 일치할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $\angle ABO = \angle BCO$ ② $\overline{AB} = \overline{BC}$

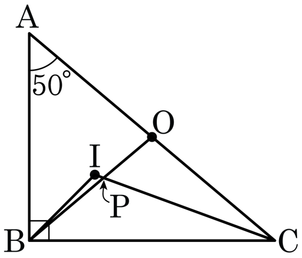
③ $\angle BOC = 120°$ ④ $\angle A = 2\angle OCB$

⑤ $\angle OBC + \angle BAC = 100°$

해설

$\triangle ABC$ 의 외심 O 와 내심 I 가 일치할 때는 삼각형이 정삼각형인 경우이므로
$\angle BAC = 60°$ 이다.
따라서 $\angle BOC = 2\angle A = 120°$ 이고, $\triangle OBC$ 는 이등변삼각형이므로 $\angle OBC = 30°$ 이다.
⑤ $\angle OBC + \angle BAC = 60° + 30° = 90°$

11. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 점 I, O 는 각각 $\triangle ABC$ 의 내심, 외심이다. $\overline{CI}$ 와 $\overline{BO}$ 의 교점을 P 라 할 때, $\angle IPB$ 의 크기는 얼마인가?



① 56° ② 57° ③ 58° ④ 59° ⑤ 60°

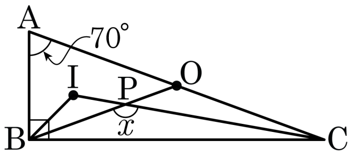
해설

$\angle ACB = 90° - 50° = 40°$ 이므로 $\angle ICB = \dfrac{1}{2}\angle C = 20°$

$\triangle OBC$ 에서 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로 $\angle OBC = \angle OCB = 40°$,$\triangle PBC$ 에서 $\angle BPC = 180° - (40° + 20°) = 120°$ 이다.

따라서 $\angle IPB = 180° - \angle BPC = 180° - 120° = 60°$ 이다.

12. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 점 O, I 는 각각 외심, 내심이다. $\angle A = 70°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?



① 120° ② 130° ③ 140° ④ 150° ⑤ 160°

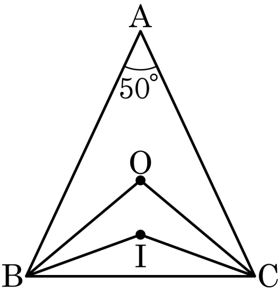
해설

$\angle ACB = 90° - 70° = 20°$ 이므로 $\angle ICB = \dfrac{1}{2}\angle C = 10°$

$\triangle OBC$ 에서 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로 $\angle OBC = \angle OCB = 20°$

따라서 $\triangle PBC$ 에서 $\angle x = \angle BPC = 180° - (10° + 20°) = 150°$ 이다.

13. 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심이고 점 I 는 $\triangle OBC$ 의 내심일 때, $\angle IBC$ 의 크기는?

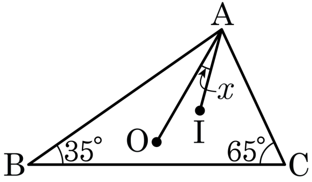


① $15°$ ② $20°$ ③ $25°$ ④ $30°$ ⑤ $32°$

해설

$\angle BOC = 2\angle A = 2\times 50° = 100°$ 이고,
$\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로 $\angle OBC = (180° - 100°) \div 2 = 40°$
점 I 가 $\triangle OBC$ 의 내심이므로 $\angle OBI = \angle IBC = 20°$

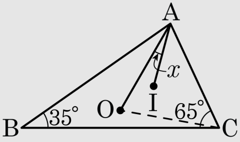
14. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\angle B = 35°$, $\angle C = 65°$ 이고, 점 O 와 점 I 는 각각 $\triangle ABC$ 의 외심과 내심일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



① 10° ② 12° ③ 15° ④ 18° ⑤ 20°

해설

점 O 와 점 C 를 이으면,

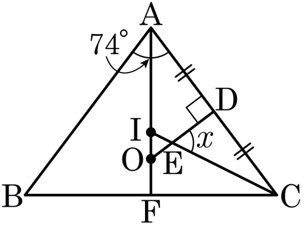


i) $\angle B = 35°$ 이므로 $\angle AOC = 70°$, $\angle OAC = \frac{1}{2}(180° - 70°) = 55°$ $\therefore \angle OAC = 55°$

ii) $\angle A = 180° - (35° + 65°) = 80°$ 이므로 $\angle IAC = \frac{1}{2} \times 80° = 40°$

$\angle x = \angle OAC - \angle IAC = 55° - 40° = 15°$ $\therefore$ $\angle x = 15°$

15. 다음 그림에서 $\overline{AF}$ 위의 두 점 O 와 점 I 는 각각 이등변삼각형 ABC 의 외심, 내심이다. $\angle BAC = 74°$, $\overline{AD} = \overline{CD}$ 일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하면?



① 62° ② 62.5° ③ 63° ④ 63.5° ⑤ 64°

해설

$\angle ACB = \angle ABC = \frac{1}{2}(180° - 74°) = 53°$

$\angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times 53° = 26.5°$

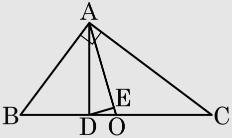
따라서 $\triangle CDE$ 에서 $\angle x = 90° - \angle ACI = 90° - 26.5° = 63.5°$ 이다.

16. $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 5$ 인 삼각형 ABC 의 외심을 O, 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 한다. $\overline{CD} = a$ 라 할 때, AOD 의 넓이를 a 를 사용하여 나타낸 것은?

① $3+2a$ ② $3+a$ ③ $3-\frac{a}{2}$

④ $\frac{2a}{5}-3$ ⑤ $\frac{6a}{5}-3$

해설



점 D 에서 $\overline{AO}$ 에 내린 수선의 발을 E 라 하면

점 O 는 직각삼각형 ABC 의 외심이므로

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \frac{5}{2}$

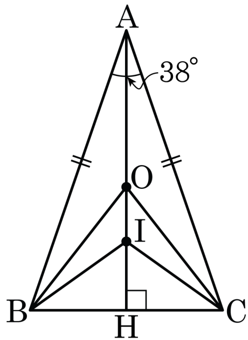
$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}$ 에서 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{AD}$

$\therefore\ \overline{AD} = \frac{12}{5}$

이때, $\overline{CD} = a$ 라 하면

$\triangle AOD = \frac{1}{2} \times \left(a - \frac{5}{2}\right) \times \frac{12}{5} = \frac{6}{5}a - 3$ 이다.

17. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 에서 점 O 는 외심, 점 I 는 내심이고, $\angle A = 38°$ 일 때, $\angle OBI$ 의 크기는?



① $13°$ ② $\frac{29}{2}°$ ③ $\frac{33}{2}°$ ④ $16°$ ⑤ $17°$

해설

$\angle BOC = 2 \times \angle BAC = 2 \times 38° = 76°$

$\therefore \angle OBC = 52°$

$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = 109°$,

$\angle IBH = \frac{1}{2} \times \angle ABC = \frac{71}{2}°$

$\angle x = \angle OBI = \angle OBC - \angle IBH = 52° - \frac{71}{2}° = \frac{33}{2}°$

18. 다음 중 내심과 외심이 일치하는 삼각형은?

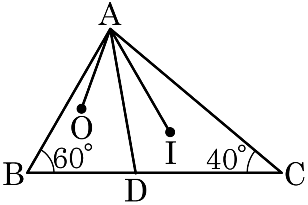
① 정삼각형 ② 직각삼각형 ③ 예각삼각형

④ 둔각삼각형 ⑤ 이등변삼각형

해설

정삼각형은 내심과 외심 그리고 무게 중심이 일치한다.

19. 다음 그림과 같이 ABC 에서 $\overline{AD} = \overline{DC}$ 가 되도록 점 D 를 잡았을 때, 점O 는 $\triangle ABD$ 의 외심이고 점 I 는 $\triangle ADC$ 의 내심이다. 이때, $\angle OAI$ 의 크기는?



① 18° ② 46° ③ 50° ④ 52° ⑤ 108°

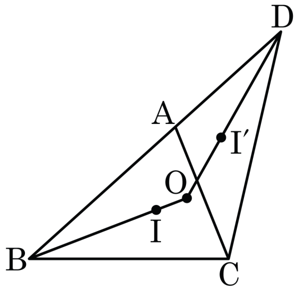
해설

$\angle DOA = 2 \times 60° = 120°$ 이므로 $\angle OAD = (180° - 120°) \div 2 = 30°$ 이고,

$\angle DAC = 44°$ 이므로 $\angle DAI = 40° \div 2 = 20°$

따라서 $\angle OAI = \angle OAD + \angle DAI = 50°$

20. $\angle BAC = 70°$, $\angle ABC = 42°$, $\overline{AC} = \overline{AD}$이고 점I, I′ 는 각각 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$의 내심이다. 점 O는 $\overline{BI}$와 $\overline{DI'}$의 연장선의 교점일 때, $\angle IOI'$의 크기를 구하여라.



① 147.5° ② 148.5° ③ 149.5°

④ 131.5° ⑤ 141.5°

해설

$\overline{AC} = \overline{AD}$이므로

$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$

점 I는 내심이므로 $\angle ABI = 42° \times \frac{1}{2} = 21°$

점 I′는 내심이므로 $\angle ADI' = 35° \times \frac{1}{2} = 17.5°$

$\therefore \angle IOI' = 180° - (21° + 17.5°) = 141.5°$