1. 다음 중 명제가 아닌 것을 모두 고르면?

① 무궁화 꽃은 아름답다. ② 한국의 수도는 서울이다.

③ $1 + 2 < 5$ ④ $x + 1 = 4$

⑤ 대학에 가고 싶다.

해설

①, ⑤ 감탄문, 희망사항, 명령, 주관적인 견해 등은 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다. ②, ③ 참인 명제이다. ④ $x = 3$인 경우는 참이지만 $x \neq 3$인 경우는 거짓이다. 따라서 x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 거짓인 명제는?

① 직사각형은 사다리꼴이다.
② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.
③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.
④ x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.
⑤ $(x-3)(y-5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설
반례 : $x = 4$

3. 전체집합 U 에서 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $\sim p \to q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $U \neq \varnothing$)

① $P^c \subset Q$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $P^c \cap Q^c = \varnothing$

④ $P \cap Q^c = Q^c$ ⑤ $P \cup Q = U$

해설

$\sim p \to q$를 확인하기 위해 대우의 참, 거짓을 판별하거나 포함 관계를 본다.
$P^c \subset Q$ 이려면 $(P \cup Q)^c = \varnothing$ 이어야 한다.
$\therefore P \cup Q = U, P^c \cap Q^c = \varnothing$
$P \cap Q = \varnothing$ 는 알 수 없다.

4. 다음 중 명제 '$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$
② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$
③ $x=1,\ y=1$
④ $x=2,\ y=4$
⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

$x+y \geq 2,\ xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x=100, y=\frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

5. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 원소가 4개인 집합의 부분집합의 개수는 16개이다.

② 원소가 3개인 집합의 진부분집합의 개수는 7개이다.

③ 집합 $\{3, 6, 7\}$ 과 집합 $\{4, 5, 6\}$ 는 서로소이다.

④ 어떤 명제가 참이면 그 대우는 반드시 참이다.

⑤ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 역이 반드시 참인 것은 아니다.

해설

① 부분집합의 개수 $= 2^n$ (n : 집합 원소의 개수)
② 진부분집합의 개수 $= 2^n - 1$
$\therefore\ 2^3 - 1 = 7$ (참)
③ $A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad A,\ B$ 는 서로소
$\therefore\ \{3,\ 6,\ 7\} \cap \{4,\ 5,\ 6\} \neq \varnothing$ (거짓)
④ (참)
⑤ (참)

6. 다음에서 조건 p 는 조건 q이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

p : a, b는 모두 짝수 $\quad q$: $a+b$는 짝수

▶ 답: 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$a,\ b$ 는 모두 짝수 $\rightarrow a+b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
$a=2m,\ b=2n$ ($n,\ m$ 은 자연수) 이면,
$a+b=2m+2n=2(m+n)$ 이므로 짝수이다.
한편, $a=3,\ b=3$ 일 때 $a+b=6$ 이므로 짝수이지만, $a,\ b$ 는 모두 홀수이다.
$\therefore p$ 는 q의 충분조건이다.

7. $p\ :\ x=3$, $q\ :\ x^2=3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

조건 $p,\ q$ 의 진리집합을 각각 $P,\ Q$ 라 하면 $P=\{3\},\ Q=\{0,\ 3\}$ 이므로 $P\subset Q,\ Q\not\subset P$ $\therefore$ 충분조건

8. $x-1=0$이 $2x^2+ax-1=0$이기 위한 충분조건일 때 상수 a 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x-1=0$이면 $2x^2+ax-1=0$이 참이므로
$x=1$을 대입하면 $2+a-1=0$
$\therefore a=-1$

9. 다음 빈 칸에 알맞은 말을 써 넣어라.

$A \cap B = A$ 인 것은 $A \subset B$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 필요충분

해설

$A \cap B = A$ 인 것이 곧, $A \subset B$ 을 의미하므로 명제와 역 모두 참이 되는 필요충분조건이다.

10. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$
② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$
④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$
⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$의 부정은 $1 \leq x \leq 2$이다.

11. 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2 - 6x + 8 = 0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x-2)(x-4) = 0 \iff x = 2$ 또는 $x = 4$, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$

② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$

③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$

④ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$

⑤ 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

12. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 $n,\ m$에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ $a,\ b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a,\ b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

13. 명제 '$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q \subset P$　② $Q^c \subset P$　③ $P \subset Q^c$
④ $P \cup Q = P$　⑤ $P \subset Q$

해설

'$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다.' 가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

14. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.' 의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

15. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$
④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설
가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

16. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$　② $p \rightarrow q$　③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim p \rightarrow q$　⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

'명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.'

$\sim p \ \rightarrow \ \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \ \rightarrow \ \sim p$(참)

$\sim q \ \rightarrow \ \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \ \rightarrow \ q$(참)

17. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

18. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 『n^2이 홀수이면 n 도 홀수이다.』임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n =$ (나) (단, k 는 자연수) 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$ ③ 대우, $2k+1$
④ 역, $2k+1$ ⑤ 역, $4k^2$

해설

'n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.' 의 대우는 'n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'
$\therefore$ (가)–대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$
$\therefore$ (나)– $2k$

19. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \le 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가)조건이다.
- $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나)조건이다.

① 필요, 필요　　② 필요, 충분

③ 충분, 충분　　④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \le 3\}$,

$Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면

$P \subset Q$, $\therefore$ 충분조건

$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,

$S = \left\{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\right\} = \{2\}$ 라고 하면

$R = S$, $\therefore$ 필요충분조건

20. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b,\quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5,\quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3,\quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0,\quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz,\quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore$ p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

21. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 '$x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.' 가 참이다.
$x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
$(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
$\therefore a=1$

22. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$
④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

23. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요 ② 충분
③ 필요충분 ④ 아무 조건도 아니다.
⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

24. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1) + f(p_2) + f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 & (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 & (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)
p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.
$\therefore$ $f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) = (-1) + 1 + 1 = 1$

25. 다음 중 명제 '어떤 실수의 제곱은 음수이다.' 의 부정으로 옳은 것은?

① 어떤 실수의 제곱은 양수이다.
② 모든 실수의 제곱은 양수이다.
③ 어떤 실수의 제곱은 0이다.
④ 모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.
⑤ 어떤 실수의 제곱은 음수가 아니다.

해설

'어떤' 의 부정은 '모든' 이고 '음수이다.' 의 부정은 '음수가 아니다.' 이다.
따라서, '어떤 실수의 제곱은 음수이다.' 의 부정은 '모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.' 이다.

26. 다음 조건을 p라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 p가 참인 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $|x| = x$ ② $x^2 = 1$

③ $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ ④ $x^2 \geq 0$

⑤ $x^2 + 1 > 2x$

해설

① 모든 실수 x 에 대하여 $|x| = x$ (거짓)
$x \geqq 0$ 일 때 $|x| = x$, $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이다.
② 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 = 1$ (거짓)
$x = \pm 1$ 일 때만 $x^2 = 1$ 이다.
③ 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ (참)
④ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ (참)
⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 > 2x$ (거짓) $x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ 이므로 $x \neq 1$인 x에 대해서만 $x^2 + 1 > 2x$ 이다.

27. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

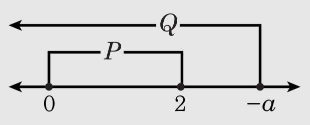
28. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x + a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x | x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

29. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $|x-2| > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 '$|x-2| \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.
$|x-2| \le 4$ 에서
$-4 \le x-2 \le 4$, $-2 \le x \le 6$이므로
$\therefore\ a \ge 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

30. 두 명제 $p \to q$ 와 $r \to \sim q$ 가 모두 참일 때, 보기에서 반드시 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $p \to r$	㉡ $r \to p$	㉢ $p \to \sim r$
㉣ $q \to \sim r$	㉤ $r \to \sim p$	

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢, ㉤　　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

$p \to q$ 가 참이고, 또한 $r \to \sim q$ 가 참이므로 그 대우명제인 $q \to \sim r$ 가 참∴ $p \to q \to \sim r$
즉, $p \to \sim r$, $q \to \sim r$ 가 참이고 또한 $p \to \sim r$ 이 참이므로 그 대우인 $r \to \sim p$ 도 참이다.
따라서 ㉢, ㉣, ㉤이 참이다.

31. 전체집합 U 의 세 부분집합 $P,\ Q,\ R$ 는 각각 세 조건 $p,\ q,\ r$ 를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$　② $Q \subset R$　③ $P^c \subset R^c$

④ $P \subset Q^c$　⑤ $R^c \subset P$

해설

$\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

$r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $R \subset Q^c$

또, $\sim p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 의 대우인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

$\therefore\ P^c \subset R^c$

따라서, 항상 옳은 것은 ③이다.

32. 두 조건 $p : |x-1| = 2$, $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이
$P = \{-1,\ 3\},\ Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

33. 다음 ( )에 「필요, 충분, 필요충분」 중에서 알맞은 것을 차례대로 써 넣어라.

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 ( )조건이다 평행사변형은 직사각형이기 위한 ( )조건이다.

▶ 답 : 조건

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 충분 조건이다. 평행사변형은 직사각형이기 위한 필요 조건이다.

34. 다음에서 조건 p가 조건q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 골라 기호로 써라. (단,a, b 는 실수)

㉠ p : $A \cup B = B$, q : $A \subset B$
㉡ p :$a^2 + b^2 = 0$, q : $a = 0$ 이고 $b = 0$
㉢ p :$a^2 = b^2$ q : $a = b$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉢ $p : a^2 = b^2 \leftarrow q : a = b$

$\therefore$ p는 q이기 위한 필요조건

35. 다음 중 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고르면? (단, x, y는 실수)

㉠ $p : x = 0$ 또는 $y = 0$, $q : xy = 0$
㉡ $p : xy = 1$, $q : x = 1$ 이고 $y = 1$
㉢ $p : x$, y는 모두 짝수, $q : x + y$는 짝수

① ㉠　② ㉡　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설
㉡ 필요조건
㉢ 충분조건

36. 다음 두 조건 $p : 2 \le x \le 5$, $q : x \ge a$ 에 대하여 p 는 q이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \le x \le 5$ 를 만족하는 영역은 $x \ge a$를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \le 2$
따라서 a의 최댓값은 2

37. $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

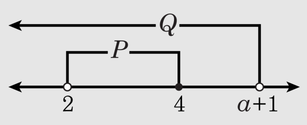
$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

38. 두 조건 p : $2 < x \leq 4, q$: $x < a+1$에 대하여 p는 q 이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a > 3$

해설



$p \to q$이므로 $a+1 > 4 \Rightarrow a > 3$

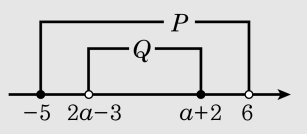
39. 두 조건 $p : -5 \le x < 6$, $q : 2a-3 < x \le a+2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : $a = 5$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면
$P = \{x \mid -5 \le x < 6\}$,
$Q = \{x \mid 2a-3 < x \le a+2\}$
이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
$\therefore\ Q \subset P$
따라서, 다음 수직선에서



$2a-3 \ge -5$ 이고 $a+2 < 6$
$2a \ge -2$ 이고 $a < 4$
$\therefore\ -1 \le a < 4$
따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5 개이다.

40. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답: ______ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$
$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$
$(P \cap U) \cap Q = P$
$P \cap Q = P$
$P \subset Q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

41. 두 명제 $p \to q$ 와 $q \to r$ 가 모두 참이면 명제 $p \to r$ 도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

> 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p는 r이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건이다.

이 때, p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$p \to r$, $q \to r$, $r \to s$, $s \to q$ 가 참이다. $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 이다.
$\therefore$ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

42. 자연수 n에 대하여 $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1,\ 2! = 2\times1,\ 3! = 3\times2\times1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n!\ (n,\ x$는 자연수$)\}$에서 두 조건 p, q가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

'p이고 $\sim q$' $\Rightarrow$ $P\cap Q^c = P - Q$

ⅰ) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5 를 가져야 한다.

$5! = \underline{5}\times4\times3\times\underline{2}\times1 = 120$

ⅱ) $6! = 6\times\underline{5}\times4\times3\times\underline{2}\times1 = 720$

43. 두 조건 $p : |x-k| \le 1$, $q : -7 \le x \le 3$에서 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12　② -4　③ 8　④ 4　⑤ 12

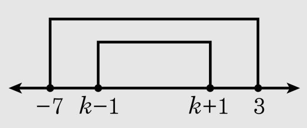
해설

$p : |x-k| \le 1$에서 $-1 \le x-k \le 1$

$\therefore k-1 \le x \le k+1 \cdots$ ㉠

$p \rightarrow q$가 참이면 ㉠이 $q : -7 \le x \le 3$에 포함되어야 한다.

수직선에 나타내면



$k-1 \ge -7 \therefore k \ge -6$

$k+1 \le 3 \therefore k \le 2$

따라서 k의 최솟값은 -6, k의 최댓값은 2 이다.

$\therefore -6+2=-4$

44. 두 조건 p, q가 p : $|x| < a$, q : $|x-1| \geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 4$　② $a > 4$　③ $a \geq 4$

④ $a > 2$　⑤ $2 \leq a \leq 4$

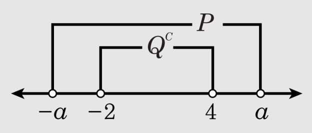
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \ \sim q \ \rightarrow \ p \Rightarrow \ Q^c \subset P$

$P = \{x \mid -a < x < a\}$

$Q = \{x \mid x \leq -2$ 또는 $x \geq 4\}$

$Q^c = \{x \mid -2 < x < 4\}$



$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2$, $a \geq 4$

$\therefore a \geq 4$

45. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$　　② $p \Rightarrow \sim r$　　③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$　　⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$

$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$

$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$

46. A, B, C 세 사람이 각각 빨강, 파랑, 검정색의 모자를 쓰고 있다. 이 세 사람 중 A 는 항상 참만을 말하고 C 는 항상 거짓만을 말한다고 한다. 이 세 사람이 다음과 같이 말했다.

㉠ 빨강 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
㉡ 검정 모자를 쓴 사람 : 자신이 B 이다.
㉢ 파랑 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 A 이다.

위의 진술로부터 이끌어 낼 수 있는 사실이 아닌 것은?

① 검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
② 빨강 모자를 쓴 사람은 A 이다.
③ 파랑 모자를 쓴 사람은 참말을 했다.
④ 파랑 모자를 쓴 사람은 C 가 아니다.
⑤ 검정 모자를 쓴 사람은 A 가 아니다.

해설

세 진술은 검정 모자를 쓴 사람을 모두 다르게 말했으므로 어느 하나만 참이다. A는 항상 참만을 말하므로 참말은 A 가 했고, B, C는 거짓말을 했다. 만약 A가 검정 모자를 썼다면 ㉢의 말, 즉 파랑 모자를 쓴 사람이 참말을 했으므로 모순이다. 만일 B가 검정 모자를 썼다면 ㉡의 말, 즉 B 가 참말을 했으므로 모순이다. 따라서 C 가 검정 모자를 썼고, 그 말을 한 빨강 모자를 쓴 사람은 참말을 했으므로, A는 빨강 모자를 썼다. 따라서 파랑 모자를 쓴 사람은 B이다. 그러므로 파랑 모자를 쓴 사람, 즉 B는 거짓말을 했다.

47. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」,「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은 ?

① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.

② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

③ 겨울이 오면 눈이 온다.

④ 눈이 오면 겨울이 온다.

⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.
라 하면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이다.
① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
③ $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로
$p \Rightarrow r$ (삼단논법)
④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

48. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 'ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.' 를 증명한 것이다.

a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m-1, b = 2n-1$ $(m, n$ 은 정수$)$ 로 나타낼 수 있으므로 $ab = (2m-1)(2n-1) = 4mn - 2m - 2n + 1$ $= 2(2mn - m - n) + 1$ 이때, $2mn - m - n$ 이 $\boxed{}$' 이므로, ab 는 $\boxed{}$이다. 따라서, 'a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.' 는 참이고 이것은 주어진 명제의 $\boxed{}$이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① 자연수, 홀수, 역
② 정수, 짝수, 대우
③ 정수, 홀수, 대우
④ 유리수, 짝수, 이
⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면
$a = 2m-1, b = 2n-1$ $(m, n$ 은 정수$)$ 로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} ab = (2m-1)(2n-1) &= 4mn - 2m - 2n + 1 \\ &= 2(2mn - m - n) + 1 \end{aligned}$$

이때, $2mn - m - n$ 이 $\boxed{\text{정수}}$이므로 ab 는 $\boxed{\text{홀수}}$이다. 이것은 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

49. 다음 중 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c 는 전체집합 U 에 대한 A 의 여집합)

① $A = B$ ② $B \subset A$ ③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$ ⑤ $A \cup B = \varnothing$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$
따라서 $(A-B) \cup (B-A) = B \cap A^c$ 에서 $(A-B) \cup (B-A) = B-A$ 가 성립하려면 $(A - B) \subset (B - A)$ 이어야 하는데 $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로소이므로 $A - B = \varnothing$ $\therefore A \subset B$

50. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$ ② $q \Rightarrow r$ ③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$ ⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore\ r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.