1. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

2. 전체집합 U에서 두 조건 $p,\ q$를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$라 한다. $\sim p \rightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \phi$ ③ $Q \subset P$
④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참따라서 $Q \subset P$

3. a, b, c 가 실수일 때, '$a^2 + b^2 + c^2 = 0$ 이다' 의 부정은?

① $a = 0$ 또는 $b = 0$ 또는 $c = 0$

② $abc \neq 0$

③ $a \neq b \neq c$

④ a, b, c 모두 0 이 아니다.

⑤ a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \leftrightarrow a = b = c = 0$, $a = b = c = 0$ 의 부정은 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이다.
즉, a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

4. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 50 이하의 양의 짝수}\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$ 는 48 의 약수, $q : 0 < x < 30$, $r : x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, ‘p 이고 q 이고 $\sim r$’ 를 만족하는 집합에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 6　　② 8　　③ 12　　④ 16　　⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면
$P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 28\}$
$R = \{4, 6\}$
‘p 이고 q 이고 $\sim r$’ 를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로
$P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$

5. 다음 중 거짓인 명제를 모두 고른 것은?

① $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2, y > 2$ 이다.

② $x > 1$ 이면 $x^2 > 1$ 이다.

③ $x + y = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다.

④ $x = 1$ 이면 $x^2 = 1$ 이다.

⑤ $2x + 4 > 0$ 이면 $x > -2$ 이다.

해설

① (반례) $x = 1.5,\ y = 10$ 이면 $xy > x + y > 4$ 이지만 $x < 2,\ y > 2$ 이므로 거짓이다.

③ (반례) $x = -1, y = 1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x \neq 0,\ y \neq 0$ 이므로 거짓이다.

6. 아래의 두 조건에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「p : x 는 18의 약수, q : x 는 12의 약수」

① $\{1, 2, 3, 6\}$ ② $\{6, 12, 9, 8\}$ ③ $\{9, 18\}$

④ $\{12, 18\}$ ⑤ $\{6, 9, 18\}$

해설

두 조건 p , q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면, $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은 $P - Q = \{9, 18\}$

7. 명제 '$-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.' 가 참일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 1$

② $0 \le a \le 1$

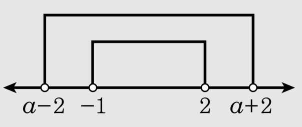
③ $a < 0$

④ $a \ge 1$

⑤ $a < 0$ 또는 $a > 1$

해설

명제 '$-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.' 가 참이 되려면
$\{x \mid -1 < x < 2\} \subset \{x \mid a-2 < x < a+2\}$ 이어야 하므로
다음 그림에서 $a-2 \le -1, a+2 \ge 2$



$\therefore 0 \le a \le 1$

8. 두 실수 x, y에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

$x+y<8$이면 $x<-2$ 또는 $y<k$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
따라서 $x \geq -2$이고 $y \geq k$이면 $x+y \geq 8$
$x \geq -2$, $y \geq k$에서 $x+y \geq k-2$이므로
$k-2 \geq 8$, $\therefore$ $k \geq 10$
따라서 k의 최솟값은 10이다.

9. 두 명제 $p \to q$, $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $q \to r$　　② $p \to r$　　③ $\sim q \to \sim p$

④ $r \to p$　　⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$p \to q(T) \Rightarrow \sim q \to \sim p\,(T)$, $\sim r \to \sim q\,(T) \Rightarrow q \to r\,(T)$

$\therefore\ p \to q \to r\,(T) \Rightarrow p \to r\,(T)$

$\therefore \sim r \to \sim p\,(T)$

10. 다음 중 명제와 그 역이 <u>모두</u> 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y=-2+3 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $3>0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \leq x^2-6x+9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a>0$ 이고 $b>0$ 이면 $a^2+b^2>0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2>0$ 이면 $a>0$ 이고 $b>0$'은 거짓이다.

11. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」,「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은 ?

① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.

② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

③ 겨울이 오면 눈이 온다.

④ 눈이 오면 겨울이 온다.

⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.
라 하면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이다.
① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
③ $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로
$p \Rightarrow r$ (삼단논법)
④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

12. 다음은 명제 '$3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)'에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

> … (생략) …
> m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$이므로, $n^2 + 1$은 3의 배수이다.
> 한편, 정수 n이 어떤 정수 k 에 대하여
> $n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
> $n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
> $n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$이므로 n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
> 따라서 n^2+1을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.
> … (생략) …

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.

② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.

③ m, n이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.

④ m, n이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.

⑤ m, n이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$은 3 의 배수이다. ⋯ ㉠
한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여,
$n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
$n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
$n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$ 이므로, n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
따라서, n^2+1을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. ⋯ ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.
따라서, $3m^2 - n^2 = 1$을 만족하는 m, n이 모두 정수인 해는 없다.

13. 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B),\ q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A,\ q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A,\ q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A,\ q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B,\ q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \ \Leftarrow\ A = B$: 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \ \subset (B \cap C)$
$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \ \Leftrightarrow\ A \subset (B \cup C)$
$A \subset (B \cap C) \ \Rightarrow\ A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \ \Leftrightarrow\ (B \cap C) \subset A$
$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \ \Leftrightarrow\ (B \cup C) \subset A$
$(B \cap C) \subset A \ \Leftarrow\ (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \ \Leftrightarrow\ B \subset A$
$B \subset A \ \Leftarrow\ B = \varnothing$: 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$
$q : A \cup (B - A) = B \ \Leftrightarrow\ (A \cup B) = B$
$\Leftrightarrow\ A \subset B \ \therefore\ P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

14. 세 집합 $A = \{x | -3 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, $C = \left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} \leq x \leq b\right\}$ 에 대하여, A 는 C 이기 위한 필요조건이고, A 는 B 이기위한 충분조건일 때, a 의 최솟값을 M, b 의 최댓값을 n 라고 하면 $2M - n^2$ 의 값은?

① -24　② -12　③ 0　④ 12　⑤ 24

해설

ⅰ) $C \subset A$ 조건에 만족하려면 $b \leq 6$
$\therefore b$ 의 최댓값, $n = 6$
ⅱ) $A \subset B$ 조건에 만족하려면 $a \geq 6$
$\therefore a$ 의 최솟값, $M = 6 \Rightarrow 2M - n^2 = -24$

15. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$　② $P - Q = \varnothing$　③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$　⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \varnothing$

16. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$ ② $q \Rightarrow r$ ③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$ ⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore\ r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.