

1. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$

② $x < 7$

③ $x \geq 7$

④ $x \leq 7$

⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

2. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$

② $P \cap Q = \phi$

③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$

⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참따라서 $Q \subset P$

3. a, b, c 가 실수일 때, ' $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ 이다'의 부정은?

① $a = 0$ 또는 $b = 0$ 또는 $c = 0$

② $abc \neq 0$

③ $a \neq b \neq c$

④ a, b, c 모두 0 이 아니다.

⑤ a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \leftrightarrow a = b = c = 0$, $a = b = c = 0$ 의 부정은
 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이다.

즉, a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

4. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 50 \text{ 이하의 양의 짝수}\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$ 는 48 의 약수, $q : 0 < x < 30$, $r : x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, ‘ p 이고 q 이고 $\sim r$ ’ 를 만족하는 집합에 속하지 않는 것은?

- ① 6 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 28\}$$

$$R = \{4, 6\}$$

‘ p 이고 q 이고 $\sim r$ ’ 를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로

$$P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$$

5. 다음 중 거짓인 명제를 모두 고른 것은?

① $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2, y > 2$ 이다.

② $x > 1$ 이면 $x^2 > 1$ 이다.

③ $x + y = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다.

④ $x = 1$ 이면 $x^2 = 1$ 이다.

⑤ $2x + 4 > 0$ 이면 $x > -2$ 이다.

해설

① (반례) $x = 1.5, y = 10$ 이면 $xy > x + y > 4$ 이지만 $x < 2, y > 2$ 이므로 거짓이다.

③ (반례) $x = -1, y = 1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x \neq 0, y \neq 0$ 이므로 거짓이다.

6. 아래의 두 조건에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「 $p : x$ 는 18의 약수, $q : x$ 는 12의 약수」

① $\{1, 2, 3, 6\}$

② $\{6, 12, 9, 8\}$

③ $\{9, 18\}$

④ $\{12, 18\}$

⑤ $\{6, 9, 18\}$

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면, $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은 $P - Q = \{9, 18\}$

7. 명제 ‘ $-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.’가 참일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 1$

② $0 \leq a \leq 1$

③ $a < 0$

④ $a \geq 1$

⑤ $a < 0$ 또는 $a > 1$

해설

명제 ‘ $-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.’가 참이 되려면 $\{x \mid -1 < x < 2\} \subset \{x \mid a-2 < x < a+2\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서 $a-2 \leq -1, a+2 \geq 2$



$\therefore 0 \leq a \leq 1$

8. 두 실수 x, y 에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

$$x + y < 8 \text{이면 } x < -2 \text{ 또는 } y < k$$

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

따라서 $x \geq -2$ 이고 $y \geq k$ 이면 $x + y \geq 8$

$x \geq -2, y \geq k$ 에서 $x + y \geq k - 2$ 이므로

$$k - 2 \geq 8, \therefore k \geq 10$$

따라서 k 의 최솟값은 10이다.

9. 두 명제 $p \rightarrow q$, $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \rightarrow r$

② $p \rightarrow r$

③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T), \sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T)$$

$$\therefore p \rightarrow q \rightarrow r(T) \Rightarrow p \rightarrow r(T)$$

$$\therefore \sim r \rightarrow \sim p(T)$$

10. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x - 1| \leq |x - 3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x = -2, y = -1$ 일 때,
 $xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.

② 거짓 : (반례) $x = -2, y = 3$ 일 때,
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.

③ 거짓 : (반례) $x = 2, y = -2$ 일 때,
 $2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.

④ $|x - 1| \leq |x - 3|$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그
역이 모두 참이다.

⑤ 명제 ' $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ ' 은 참이지만, 그의
역 ' $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ ' 은 거짓이다.

11. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」, 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은 ?

- ① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.
- ② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ③ 겨울이 오면 눈이 온다.
- ④ 눈이 오면 겨울이 온다.
- ⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.

라 하면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이다.

- ① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
- ② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
- ③ $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r$ (삼단논법)
- ④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
- ⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

12. 다음은 명제 ' $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)'에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

... (생략) ...

m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다.

한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여

$$n = 3k \text{ 이면 } n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

$$n = 3k + 1 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$n = 3k + 2 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ 이므로 } n^2 \text{ 을 } 3 \text{ 으로 나눈 나머지는 } 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.

... (생략) ...

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

- ① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.
- ② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.
- ③ m, n 이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
- ④ m, n 이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
- ⑤ m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다. ... ㉠

한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여,

$$n = 3k \text{ 이면 } n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

$$n = 3k + 1 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$n = 3k + 2 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ 이므로, } n^2 \text{ 을 } 3 \text{ 으로 나눈 나머지는 } 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 이다.}$$

따라서, $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. ... ㉡

그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.

따라서, $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

13. 집합 A, B, C 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p: (A \cap B) \subset (A \cup B), q: A = B$

② $p: A \cap (B \cap C) = A, q: A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p: A \cup (B \cap C) = A, q: A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p: A \cup B = A, q: B = \phi$

⑤ $p: A \cup (B - A) = B, q: A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \Leftarrow A = B$: 필요조건

② $p: A \cap (B \cap C) = A \subset (B \cap C)$

$q: A \cup (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$

$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p: A \cup (B \cap C) = A \Leftrightarrow (B \cap C) \subset A$

$q: A \cap (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow (B \cup C) \subset A$

$(B \cap C) \subset A \Leftarrow (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

$B \subset A \Leftarrow B = \emptyset$: 필요조건

⑤ $p: A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$

$q: A \cup (B - A) = B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$

$\Leftrightarrow A \subset B \therefore P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

14. 세 집합 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, $C = \left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq b\right\}$

에 대하여, A 는 C 이기 위한 필요조건이고, A 는 B 이기위한 충분 조건일 때, a 의 최솟값을 M , b 의 최댓값을 n 라고 하면 $2M - n^2$ 의 값은?

- ① -24 ② -12 ③ 0 ④ 12 ⑤ 24

해설

i) $C \subset A$ 조건에 만족하려면 $b \leq 6$

$\therefore b$ 의 최댓값, $n = 6$

ii) $A \subset B$ 조건에 만족하려면 $a \geq 6$

$\therefore a$ 의 최솟값, $M = 6 \Rightarrow 2M - n^2 = -24$

15. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$

② $P - Q = \emptyset$

③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \emptyset$

⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \emptyset$

16. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q, r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$

② $q \Rightarrow r$

③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$

⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$ 가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.