1. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$ ② $3x^2-1$ ③ $3x^2$

④ $3x^2+1$ ⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$$A=\frac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$$

2. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　　② 3^3-3^4　　③ 0

④ 1　　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3 = A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

3. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=6,\ abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$= 2\times(6-(-1))-3=11$

4. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore\ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

5. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형

④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서

$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$

$a^2-(b-c)^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$

$2a^2 = 2b^2+2c^2$

$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

6. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$ ①

양변에 $x=2$을 대입하면

$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$ ②

① + ②에 의해

$2^{10}+2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$\therefore (a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

7. 두 다항식 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 에 대하여 $x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) + R(x)$ 가 성립할 때, $Q(1)$ 의 값은? (단 $R(x)$ 의 차수는 이차 이하이다.)

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 8　　⑤ 16

해설

$R(x) = ax^2 + bx + c$(a, b, c는 실수)라 하면

$x^7 - 2 = x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$

양변에 $x = 0$을 대입하면 $-2 = c$

$x^7 - 2 = x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx - 2 \cdots ①$

①의 양변에 $x = i$을 대입하면

$-i - 2 = -a + bi - 2$

$a = 0,\ b = -1$ 이므로 $R(x) = -x - 2$

$\therefore\ x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) - x - 2$

양변에 $x = 1$을 대입하면

$-1 = 2Q(1) - 3$ 이므로

$\therefore\ Q(1) = 1$

8. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0,\ g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$　　② $x-1$　　③ $-x+1$

④ $-x-1$　　⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax+b$라 하면

$$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{aligned} g(\sqrt{2}+1) &= f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b \\ &= a(\sqrt{2}+1)+b\ (\because\ f(\sqrt{2}+1)=0) \end{aligned}$$

$$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$$

$$\therefore\ a=1,\ b=1$$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$

9. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$
$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$
$=(x-y)(x+y+1)^2$
$p=-1, q=1, r=1$
$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

10. $\sqrt{21\cdot22\cdot23\cdot24+1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x=21$이라 하면

$\sqrt{21\cdot22\cdot23\cdot24+1}$

$=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$=\sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$=\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$=\sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$=\sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$=x^2+3x+1\ (\because (x^2+3x)+1>0)$

$=21^2+3\cdot21+1=505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

11. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=(b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$=(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

12. $a+b+c=0$일 때, $\dfrac{a^2+1}{bc}+\dfrac{b^2+1}{ac}+\dfrac{c^2+1}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(\text{준식})=\frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로

$$\therefore\ \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$$

13. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c$ ($\because a,\ b,\ c$는 실수)

따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

$a^2=1$

$\therefore\ a=b=c=1$

$\therefore\ a+b+c=3$

14. 두 다항식 x^2-3x+a 와 x^2+bx-6 의 최대공약수가 $x-1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$ 라 하자. 이 때, $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ **답:**

▷ **정답:** 0

해설

x^2-3x+a, x^2+bx-6 은
$(x-1)$ 을 인수로 가지므로 $a=2, b=5$
$\therefore\ x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$
$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$
$f(x)=(x-1)(x-2)(x+6)$
$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지 $f(2)=0$

15. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots①$

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots②$

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

16. x에 대한 다항식 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $3b-2a$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

$x^{10}\left(x^2+ax+b\right)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$이므로

$x^2+ax+b=(x-2)(x-\alpha)$라 할 수 있다.

$x^{10}(x-2)(x-\alpha)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$

$\therefore\ x^{10}(x-\alpha)=(x-2)Q(x)+2^{10}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(2-\alpha)=2^{10}\ \therefore \alpha=1$

$\therefore\ x^2+ax+b=(x-2)(x-1)$

$=x^2-3x+2$

$a=-3,\ b=2$

$\therefore\ 3b-2a=12$

17. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을구하면?

① 1　　② -1　　③ 3　　④ -4　　⑤ -3

해설

(i) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$

$f(1) = 1 + a + b = 0$

$\therefore\ b = -(a+1)$

(ii) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$

$= (x-1)^2 Q(x)$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$

$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0\ \ \therefore\ a = -4$

$b = -(a+1)$에서 $b = 3$

$\therefore a + b = -1$

18. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① 0
② 1
③ r_1
④ $r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n$
⑤ $r_1r_2\cdots\cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (x-1)f_2(x)+r_1 \\
&= (x-1)\{(x-1)f_3(x)+r_2\}+r_1 \\
&= (x-1)^2f_3(x)+r_2(x-1)+r_1 \\
&= (x-1)^2\{(x-1)f_4(x)+r_3\}+r_2(x-1)+r_1 \\
&= (x-1)^3f_4(x)+r_3(x-1)^2+r_2(x-1)+r_1 \\
&\quad\vdots \\
&= (x-1)^nf_{n+1}(x)+r_n(x-1)^{n-1}+r_{n-1}(x-1)^{n-2}+\cdots\cdots \\
&\qquad +r_2(x-1)+r_1
\end{aligned}$$

$$R(x)=r_n(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots+r_2(x-1)+r_1$$

$$\therefore\ R(2)=r_n+r_{n-1}+\cdots\cdots+r_2+r_1$$

19. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

① 4　② 3　③ 2　④ 1　⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2+1)(x-1)g(x)+ax^2+bx+c$로 두면 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

$ax^2+bx+c = a(x^2+1)+bx+c-a$에서

$bx+c-a = x+1$

$\therefore\ b=1,\ c-a=1$

또, $f(1)=a+b+c=4$이므로

$c-1+1+c=4$에서 $c=2$

20. 2003^{10} 를 2002 와 2004 로 나눈 나머지가 각각 a, b 일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

2002를 x라 하면, $2003^{10}=(x+1)^{10}$

$(x+1)^{10}=xQ(x)+a$

$(x+1)^{10}=(x+2)Q(x)+b$

나머지 정리에 의해

$x=0,\ x=-2$를 각각 대입하면,

$a=1,\ b=1$

$\therefore a-b=0$

21. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
 & & 1 & 3 & & \\ \hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
 & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}$$

$a = 1\ \ \boxed{4} = b$

$\therefore 2c - bd = -4$

22. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$
② $(b+c)(ab+bc+ca)$
③ $(a+b)(a+b+c)$
④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c=k$ 라 하면

(준식)$=(k-a)(k-b)(k-c)+abc$

$=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc+abc$

$=k\left\{k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)\right\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)\ (\because a+b+c=k)$