1. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\,, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$

④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$
$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$
$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

2. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0,\ b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$

$=5+4=9$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$　　② $ab \ge 0$　　③ $a+b \ge 0$

④ $ab < 0$　　⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

4. $p(x)$: $x > 0$, $q(x)$: $x < 1$ 일 때, '$p(x)$ 이고 $q(x)$ ' 의 진리집합을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid x > 0\}$

② $\{x \mid 0 < x < 1\}$

③ $\{x \mid x > 1\}$

④ $\{x \mid x < 0 \text{ 또는 } x > 1\}$

⑤ $\{x \mid x < 1\}$

해설

$p(x) : x > 0$, $q(x) : x < 1$ 이므로 $p(x)$ 이고 $q(x)$ 이면 $x > 0$ 이고 $x < 1$ 이다.

즉, $\{x \mid 0 < x < 1\}$

5. 다음 중 참인 명제는 모두 몇 개인가?

㉠ 임의의 유리수 x에 대하여 $x+y=\sqrt{3}$ 을 만족하는 유리수 y 가 존재한다. ㉡ 임의의 유리수 x에 대하여 $xy=1$ 을 만족하는 유리수 y 가 존재한다. ㉢ 임의의 무리수 x에 대하여 $xy=1$ 을 만족하는 무리수 y 가 존재한다. ㉣ 임의의 무리수 x에 대하여 $\sqrt{3}x$ 는 무 리수이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

㉠ 주어진 조건을 만족하는 유리수 y가 존재한다면 (유리수)+(유리수)=(무리수)가 되므로 모순이다. (거짓)
㉡ $x=0$ 일 때, $xy=1$을 만족하는 y는 존재하지 않는다. (거짓)
㉢ x가 무리수이므로 $x \neq 0$이다. 즉, $xy=1$ 에서 $y=\dfrac{1}{x}$ 은 무리수이므로 무리수 y가 존재한다. (참)
㉣ $x=\sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{3}x=\sqrt{3}\sqrt{3}=3$ 이 되어 유리수이다. (거짓)
따라서 참인 명제는 ㉢ 하나뿐이다.

6. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 P, Q, R 이라 할 때, $P-Q=R$ 을 만족한다. 다음 <보기> 중 항상 참인 명제를 <u>모두</u> 고른 것은?

보기

㉠ $r \to \sim q$	㉡ $r \to p$	㉢ $r \to q$
㉣ $\sim r \to \sim p$	㉤ $p \to q$	

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉤
④ ㉢, ㉣, ㉤　⑤ ㉡, ㉣, ㉤

해설

$P-Q=R$
따라서, $R \subset P$ 이고 집합간의 관계를 살펴보면
$Q=R^c, R=Q^c$ 이 된다.
이를 명제로 표현하면 $r \to p, q \to \sim r, r \to \sim q$ 이므로 참인 명제는 ㉠, ㉡이다.

7. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a|-|b| \geq |a-b|$

② $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

④ $a^2+ab+b^2 \geq 0$

⑤ $a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$

해설

① 반례 : $a=-1$, $b=1$

$|-1|-|1| \geq |-1-1|$

$|-1|-|1| \geq |-2|$

$1-1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$

② $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

③ $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 \geq a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

$a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

④ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+1+b^2-2b+1+1$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0 \rightarrow (\bigcirc)$

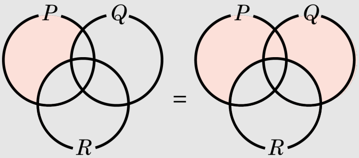
8. 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라고 하자. $P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p \rightarrow q$ ② $r \rightarrow q$ ③ $q \rightarrow p$

④ $p \rightarrow r$ ⑤ $q \rightarrow r$

해설

$P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q\cup R=R \leftrightarrow Q\subset R \therefore\ q\rightarrow r$ 가 참이다.

9. 전체집합 U의 임의의 부분집합을 A라 하고 조건 p, q를 만족시키는 집합을 P, Q라 하자. $(A \cap P) \cup (A^c \cap Q) = (A \cap P) \cup Q$가 성립할 때 다음 중 참인 명제는?

① $\sim q \rightarrow p$ ② $p \rightarrow q$ ③ $p \leftrightarrow q$

④ $q \rightarrow p$ ⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

집합 A가 전체집합 U의 임의의 부분집합이므로 $A = U$라 놓으면, 좌변 : $(U \cap P) \cup (\varnothing \cap Q) = P \cup \varnothing = P$

우변 : $(U \cap P) \cup Q = P \cup Q$ $\therefore$ $P = P \cup Q$ 이므로 $Q \subset P$

$\therefore$ $q \rightarrow p$는 참이다.

10. P섬에 사는 사람들은 오직 진실만을 말하고, Q섬에 사는 사람들은 오직 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A, B는 다음과 같이 말했다.

A : 우리는 모두 Q섬에서 왔다.B : 우리들 중 오직 한 사람만이 P섬에서 왔다.

A, B, C는 각각 어느 섬으로부터 왔는가?

① A, B는 P섬, C는 Q섬에서 왔다.

② A, B는 Q섬, C는 Q섬에서 왔다.

③ A, B, C는 모두 Q섬에서 왔다.

④ B 는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

⑤ B 는 Q섬, A, C 는 P섬에서 왔다.

해설

A의 말은 거짓이다. 즉, A는 Q섬 사람이고 '우리 모두 Q섬 사람이다.'가 거짓이므로 B, C중 P섬 사람이 있어야 한다. 만일 B 가 P섬 사람이면 B의 말이 진실이므로 C는 Q섬에서 왔다. 그러나 B가 Q섬에서 왔다면 B의 말이 거짓이므로 P섬 사람이 둘 이상이어야 하는데 A와 B가 Q섬 사람이므로 모순이다. 따라서, B는 P섬, A, C는 Q섬에서 왔다.

11. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > c > a$

④ $b > a > c$ ⑤ $c > b > a$

해설

$$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \ \left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$

12. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x분씩 늘어나며 y명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
y명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로
$10x + 2y \le 60 \cdots$ ㉠
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
$10x + 2y \ge 2\sqrt{10x \cdot 2y}$
$10x + 2y \ge 2\sqrt{20xy} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\sqrt{20xy} \le 60,\ 20xy \le 900$
$\therefore\ xy \le 45$
따라서 xy의 최댓값은 45이다.