

1. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023

② 1024

③ 1025

④ 2046

⑤ 2050

해설

$$x = 0 \text{ 대입, } a_0 = 1$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$$

$$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$$

2. $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값을 구하면?

① 8

② 16

③ 32

④ 64

⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore 2^5 = 32$$

3. x 에 대한 다항식 $(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0

② 16

③ 32

④ 64

⑤ 1024

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(4x^2 - 3x + 1)^5 = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_9x + a_{10}$ 과 같이 된다.

여기서 모든 계수들의 합

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 을 구하려면

$x = 1$ 을 대입하면 된다.

즉, $(4 - 3 + 1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

모든 계수들의 합은 $2^5 = 32$

4. $x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)^3 + a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ 가 항등식일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & \\
 & & -1 & 2 & -2 & \\
 \hline
 -1 & 1 & -2 & 2 & 0 & \\
 & & -1 & 3 & & \\
 \hline
 -1 & 1 & -3 & 5 & & \\
 & & -1 & & & \\
 \hline
 & 1 & -4 & & &
 \end{array}$$

$$\therefore a = -4, b = 5, c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 1$$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$2 = 1 + a + b + c$$

$$\therefore a + b + c = 1$$

5. $x^3 + 2x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 $a + b + c + d$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$8 + 8 - 2 + 1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = 15$$

해설

(i) a, b, c, d 의 값을 각각 구하려면 우변을 전개하여 계수비교를 하거나

(ii) 조립제법: 좌변을 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫의 계수가 a 이다.

6. 다항식 $(x^3 + x^2 - 2x - 1)^5$ 을 전개한 식이 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{14}x^{14} + a_{15}x^{15}$ 일 때, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{14} - a_{15}$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$$(x^3 + x^2 - 2x - 1)^5$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{14}x^{14} + a_{15}x^{15}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1 + 1 + 2 - 1)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{14} - a_{15} = 1$$