1. b, c는 상수이고, 모든 실수 x에 대하여 $(x+2)(x+b)=x^2+cx+6$을 만족하는 c의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(x+2)(x+b)=x^2+cx+6$,
$x^2+(2+b)x+2b=x^2+cx+6$,
$2+b=c$, $2b=6$
$\therefore b=3$
따라서 $c=5$

2. 등식 $2x^2-6x-2=a(x+1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x+1)$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

$x=0$을 대입하면 : $a=1$
$x=-1$을 대입하면 : $b=2$
$x=2$을 대입하면 : $c=-1$
$\therefore\ a+b+c=2$

3. 임의의 실수 x, y에 대하여, $(x+y)a^2+(x-y)b=4x+y$가 성립할 때, a^2+b^2의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$(a^2+b)x+(a^2-b)y=4x+y$

$a^2+b=4\cdots$①, $a^2-b=1\cdots$②

①, ②에서 $a^2=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=\frac{19}{4}$

4. $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값을 구하면?

① 8　　② 16　　③ 32　　④ 64　　⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ 이므로
$\therefore\ 2^5 = 32$

5. 다항식 $x^3 - 2x^2 + 5x - 6$을 일차식 $x - 2$로 나눌 때의 나머지는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 6 \\ &= (x-2)Q(x) + R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 \\ &= 8 - 8 + 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ R = 4$

6. 다항식 $f(x) = -4x^3 + kx + 1$가 일차식 $x - 1$로 나누어 떨어 지도록 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = -4x^3 + kx + 1 = (x - 1)Q(x)$

$f(1) = -4 + k + 1 = 0$

$\therefore\ k = 3$

7. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a-b+c$ 의 값은?

$$x^2-2x+4=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$$

① 8 ② 7 ③ 3 ④ 0 ⑤ -3

해설

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

$x=0$을 대입하면

$4=2a \quad \therefore\ a=2$

$x=1$을 대입하면

$3=-b \quad \therefore\ b=-3$

$x=2$을 대입하면

$4=2c \quad \therefore\ c=2$

$\therefore\ a-b+c=2-(-3)+2=7$

8. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$을 $3x - 2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1) + R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 = (3x - 2)Q(x) + R$
양변에 $x = 1$을 대입하면, $13 = Q(1) + R$
$\therefore\ Q(1) + R = 13$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$를 $3x - 2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

9. 다항식 $x^3 + ax + b$가 다항식 $x^2 - x + 1$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2 = x - 1$을 대입하면
$ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a = 0,\ b - 1 = 0$
$\therefore\ a = 0,\ b = 1$
$\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
$= (x^2 - x + 1)Q(x)$
$= (x^2 - x + 1)(x + b)$
$\therefore\ b = 1,\ a = 0$

10. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는
$(a-b+16)x+4b-8$
$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로,
$a-b+16=3,\ 4b-8=4$
$\therefore\ a=-10,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

11. a, b는 정수이고, ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

ax^3+bx^2+1

$=(x^2-x-1)(ax-1)$

$=ax^3-(1+a)x^2+(1-a)x+1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1+a)=b, 1-a=0$

$\therefore\ a=1, b=-2$

12. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 7$을 $x + 2$로 나누면 나머지가 5이다. 이 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) = x^4 - 3x^2 + ax + 7$
$f(x) = (x+2)Q(x) + 5$
$\therefore\ f(-2) = 5$
$f(-2) = 16 - 12 - 2a + 7 = 5$
$\therefore\ a = 3$

13. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$　　② $-x+3$　　③ $x-3$

④ $-x-3$　　⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$구하는 나머지는 $-x+3$

14. 다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x+2$로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$이다. $4a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(2)=5,\ f(-2)=3$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)Q(x)+ax+b \\ &= (x-2)(x+2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$f(2)=2a+b=5,\ f(-2)=-2a+b=3$

$a=\frac{1}{2},\ b=4$

15. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이고, $x-3$으로 나눈 나머지가 5이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x-1$

해설

$f(-1)=-3,\ f(3)=5$

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$-a+b=-3,\ 3a+b=5$

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ ax+b=2x-1$

16. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$　　② $x+1$　　③ $-x+1$

④ x　　⑤ $-x$

해설

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1$

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+2 \quad \Rightarrow \quad f(2)=2$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$라 하면,

$f(1)=a+b=1, \quad f(2)=2a+b=2$이다.

$\therefore \ a=1, \quad b=0$이므로 나머지는 x

17. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,
$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$라 할 수 있다.
$f(1) = a + b = 2$
$f(-2) = -2a + b = 5$
연립하면, $a = -1 \quad b = 3$
$\therefore R(x) = -x + 3$
$R(2) = 1$

18. 다항식 ax^3+bx^2-4 가 x^2+x-2로 나누어 떨어지도록 a, b를 정할 때, a와 b의 곱을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$ax^3+bx^2-4=(x^2+x-2)Q(x)$
$=(x-1)(x+2)Q(x)$
양변에 $x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면
$a+b-4=0,\ -8a+4b-4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$
$\therefore\ ab=3$

해설

$ax^3+bx^2-4=(x^2+x-2)(ax+2)$
우변을 전개하여 계수를 비교하면
$a=1,\ b=3\ \therefore\ ab=3$

19. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3　　② -4　　③ 2　　④ 8　　⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)\{a(x-1)+b\}+c$

$$\begin{array}{c|ccccl}
1 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & & 3 & 5 & & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} & \leftarrow & c \\
 & & 3 & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} & \leftarrow c & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & a & & & &
\end{array}$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$
$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$
$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면
$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$
$\therefore\ a=3,\ b=8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

20. k의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① -3　② 0　③ 3　④ 6　⑤ 8

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$

위 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=2,\ z=3$

$\therefore\ x+y+z=6$

21. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

22. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x),\ R$　　② $3Q(x),\ R$　　③ $Q(x),\ 3R$

④ $\frac{1}{3}Q(x),\ R$　　⑤ $Q(x),\ \frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지 : R