

1. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $ab + bc + ca = 9$, $a + b + c$ 의 값은?

① $-3\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{3}$

③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$
$$= 9 + 18 = 27$$

$$\therefore a + b + c = \pm 3\sqrt{3}$$

2. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4(2x - 1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4 \cdot (2x - 1)^7$
 $= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \dots + a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \dots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한
결과와 같으므로 항등식의 성질에서
 $(1 + 2 - 3 + 2)^4 \cdot (2 - 1)^7 = 2^4 = 16$

3. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + k)$ 라 할 수 있다.
여기에서 상수항을 비교하면 $k = 3$
 $x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$
 $= x^3 + 3x^2 + x + 3$
 $\therefore a = 3, b = 1$ 이므로 $a + b = 4$

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)Q(x)$
 $x^2 = -1$ 을 대입하면
 $-x - a + bx + 3 = 0, (b - 1)x + (3 - a) = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a = 3, b = 1$
 $\therefore a + b = 4$

4. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$

② $-x - y$

③ $x + y - 2$

④ $x - y$

⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) \\ &= (x + y)^2 - 2(x + y) \\ &= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2) \\ &= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

5. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c 라 하자.

$$4(a + b + c) = 36, 2(ab + bc + ca) = 56$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 56 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{대각선의 길이}) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

6. $x^5 + x + 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라고 할 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) + R$$

$$x = -1 \text{을 양변에 대입하면 } R = -1$$

$$\therefore x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) - 1 \cdots \textcircled{1}$$

$Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$

$$\textcircled{1} \text{에 } x = 1 \text{을 대입하면 } 3 = 2Q(1) - 1$$

$$\therefore Q(1) = 2$$

7. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{15} \dots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2 = 2(a_0 + a_2 + \dots + a_{14}) \text{이다.}$$

$$\therefore a_0 + a_2 + \dots + a_{14} = 1$$

8. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ & p = -1, q = 1, r = 1 \\ & \therefore p^2 + q^2 + r^2 = 3 \end{aligned}$$

9. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겹넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

$$\begin{aligned} & \text{세 모서리의 길이를 } a, b, c \text{ 라 하면} \\ & 2(ab + bc + ca) = 52 \\ & 4(a + b + c) = 36 \rightarrow a + b + c = 9 \\ & (\text{직육면체 대각선의 길이}) \\ & = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ & = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)} \\ & = \sqrt{81 - 52} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

10. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\ &= (x^2 + 2x - 3)Q'(x) + 2x + 1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

11. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $x^2 - x - 12$ 로 나눈 나머지가 $14x - 9$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $x^3 + ax^2 + bx + 3$
 $= (x^2 - x - 12)Q(x) + 14x - 9$
 $= (x - 4)(x + 3)Q(x) + 14x - 9$
 $x = 4, x = -3$ 을 각각 대입하면
 $16a + 4b + 67 = 47 \cdots \text{㉠}$
 $9a - 3b - 24 = -51 \cdots \text{㉡}$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 3$
 $\therefore a + b = 1$

12. $4(a-b)^2 + 2b(a-b) - b(b-c) - (b-c)^2$ 을 두 일차식의 곱으로 인수분해하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $(2a-3b+c)(2a-c)$

해설

$$\begin{aligned} & 4(a-b)^2 + 2b(a-b) - b(b-c) - (b-c)^2 \\ &= 4(a-b)^2 - (b-c)^2 + 2b(a-b) - b(b-c) \\ &= \{2(a-b)\}^2 - (b-c)^2 + b\{2(a-b) - (b-c)\} \\ &= (2a-b-c)(2a-3b+c) + b(2a-3b+c) \\ &= (2a-3b+c)(2a-b-c+b) \\ &= (2a-c)(2a-3b+c) \end{aligned}$$

13. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 을 $3x - 2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(1) + R$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 = (3x - 2)Q(x) + R$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $13 = Q(1) + R$
 $\therefore Q(1) + R = 13$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 를 $3x - 2$ 로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

14. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 이다. $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$$

$$Q(2) = -2$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2) + 1 \\ &= -1 \times (-2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

15. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2046 ⑤ 2050

해설

$$x = 0 \text{ 대입, } a_0 = 1$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$$

$$2a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$$