1. 원 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 이 점 $(-3,\ 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$
이 점 $(-3,4)$ 를 지나므로
$9+16+6-16a+b=0$
$\therefore\ 16a-b=31\ \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 은
$(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-b+1$ 이고
원이 x 축에 접하므로
$2a=\sqrt{4a^2-b+1},\ 4a^2=4a^2-b+1$
$\therefore\ b=1\ \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $16a-1=31$
$\therefore\ a=2 \qquad \therefore\ a+b=2+1=3$

2. 점 $A(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

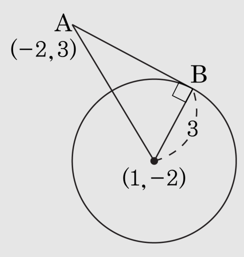
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



3. 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(1, -3)$에서 원에 그은 접선의 x절편은?

① -10　② $-\frac{10}{3}$　③ -1　④ 10　⑤ $\frac{10}{3}$

해설

점 $(1, -3)$에서 그은 접선의 방정식은

$1\,x - 3\,y = 10$

x절편은 $y = 0$일 때의 x좌표이므로 $x = 10$

4. 두 점 A$(-1,\ 1)$, B$(2,\ 1)$ 로부터의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 에 대하여 $\angle$PAB 가 최대일 때 선분 AP 의 길이는?

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 로 놓으면

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4\left\{(x-2)^2 + (y-1)^2\right\}$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

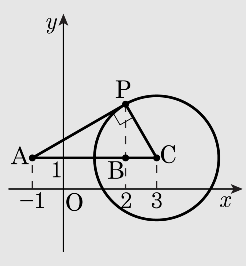
$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

따라서 점 P는 중심이 $(3,\ 1)$ 이고

반지름의 길이가 2 인 원 위를 움직이므로

$\angle$PAB 가 최대가 되는 것은

그림과 같이 직선 AP 가 원에 접할 때이다.



원의 중심을 C 라 하면

$\triangle$PAC 에서

$\angle\mathrm{APC} = 90^\circ$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{PC}}^2}$

$= \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

5. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 가 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{Q}(x+y,\ x-y)$ 의 자취는 원을 나타낸다. 이 원의 넓이는?

① π　　② 2π　　③ 3π　　④ 4π　　⑤ 5π

해설

$X=x+y$, $Y=x-y$ 로 놓고, $x,\ y$ 에 관하여 연립하여 풀면

$x=\frac{1}{2}(X+Y)$,

$y=\frac{1}{2}(X-Y)$

이것을 $x^2+y^2=1$ 에 대입하여 정리하면

$X^2+Y^2=(\sqrt{2})^2$

따라서 구하는 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$

6. 두 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, $x^2+y^2=r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을
$C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=9 \leftarrow$ 중심 $(3,4)$
$C_2:x^2+y^2=r^2(r>0) \leftarrow$ 중심 $(0,0)$
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다.
이 때, $|r-3|=5$ 이어야 하므로 $r-3=\pm5$
$\therefore r=8(\because r>0)$

7. 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2-2y-3=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-4x+1=0 \cdots\cdots$ ㉡

과 x, y에 대한 방정식

$\left(x^2+y^2-2y-3\right)+k\left(x^2+y^2-4x+1\right)=0$(단, k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉢

에 대하여 방정식 ㉢의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지남을 보이는 과정이다. (가) ~ (마) 에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

두 원 ㉠, ㉡의 교점을 (α,β)라고 하면 (가), (나)(←두 원은 모두 점 (α,β)를 지나므로) 이므로 임의의 실수 k에 대하여 (다) (←(α,β)를 ㉢에 대입한 것과 같은 식) 이 성립한다. 따라서, (라) 의 그래프는 k의 값에 관계없이 (마), 즉, 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지난다.

① (가) : $\alpha^2+\beta^2-2\beta-3=0$

② (나) : $\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1=0$

③ (다) : $\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta-3\right)+\left(\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1\right)=0$

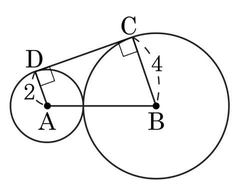
④ (라) : ㉢

⑤ (마) : 점 (α,β)

해설

(α,β) 를 ㉢ 에 대입한 식은 $\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta-3\right)+k\left(\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1\right)=0$

8. 다음 그림과 같이 서로 외접하는 두 원 A 와 B 의 반지름의 길이는 각각 2 와 4 이다. 두 원과 공통외접선의 교점을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이를 구하면?



① $8\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{2}$

④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

해설

피타고라스의 정리에 의하여 변 CD 의 길이는
$\sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
따라서 사각형 ABCD 의 넓이는
$\frac{(2+4)4\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$ 이다.

9. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$ ④ $m \le -2\sqrt{2},\ m \ge 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2},\ m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$
$\dfrac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$
$\Rightarrow$ $k = \pm 2$
$\therefore$ $k = -2$ ($\because$ $k < 0$)

11. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
$|a-1|=10$
$a-1=\pm 10$
$a>0$ 이므로 $a=11$

12. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots①$
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

13. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

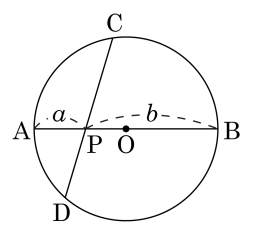
해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

14. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{\mathrm{PC}}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{\mathrm{AP}} = a$, $\overline{\mathrm{BP}} = b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a, b 를 써서 나타내면?



① $\dfrac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$
④ ab ⑤ $\dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$\overline{\mathrm{CP}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ 이고

$\overline{\mathrm{AP}} \cdot \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{CP}} \cdot \overline{\mathrm{DP}}$ 이므로

$ab = \dfrac{a+b}{2} \cdot \overline{\mathrm{DP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{DP}} = \dfrac{2ab}{a+b}$

15. 평행이동 $f: (x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $(1,\ 2)$는 점 $(-1,\ 3)$으로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f에 의하여 원 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$이 옮겨진 원의 중심의 좌표는?

① $(1,-2)$
② $(-3,\ 2)$
③ $(2,-1)$
④ $(-1,\ 2)$
⑤ $(2,-3)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 -2,
y축의 방향으로 $+1$만큼
평행이동 하는 변환이다.
$x^2+y^2+2x-2y+1=0$의 중심은
$(-1,\ 1)$이므로 평행이동 f에 의하여
$(-1-2,\ 1+1)=(-3,\ 2)$로 이동한다.

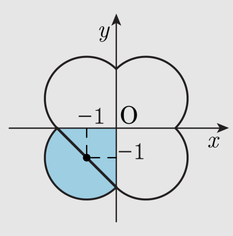
16. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi+2$ ② $2\pi+4$ ③ $2\pi+8$

④ $4\pi+8$ ⑤ $8\pi+8$

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$

따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로

$4(\pi+2)=4\pi+8$

17. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2+y^2-2x+4y-6=0$

② $x^2+y^2+2x-4y-6=0$

③ $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

④ $5x^2+5y^2+8x-16y-21=0$

⑤ $x^2+y^2-4x+8y-12=0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ -2a)$ 라 할 수 있다.

$(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$

점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로,

$(3-a)^2+(2a)^2=r^2 \cdots$ ①

또, 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로,

$a^2+(1+2a)^2=r^2 \cdots$ ②

①, ②에서 $a=\frac{4}{5},\ r^2=\frac{37}{5}$

$\therefore \left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{8}{5}\right)^2=\frac{37}{5}$

정리하면 $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

18. 점 $\mathrm{P(a,\ b)}$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{P(a, b)}$, $\mathrm{Q(a, 0)}$, $\mathrm{O(0, 0)}$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$a,\ b$ 의 부호와 상관 없으므로
$a > 0,\ b > 0$ 이라 하면
$\triangle\mathrm{POQ}$ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$
P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$
산술기하조건을 이용하면,
$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$
$ab \leq \frac{1}{2}$
$\therefore$ 넓이의 최댓값 : $\frac{1}{4}$

19. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ 인 원을 x축 방향으로 a 만큼 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=4$　　② $a^2+b^2=9$　　③ $a^2+b^2=16$

④ $a^2+b^2=25$　　⑤ $a^2+b^2=36$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \cdots$ ㉠
원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=9$
$\{x-(a-3)\}^2+\{y-(b+2)\}^2=9 \cdots$ ㉡
원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.
$\therefore\ d=\sqrt{(a-3+3)^2+(b+2-2)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$
$\therefore\ a^2+b^2=36$

20. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y = ax + b$에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 5$이다.
원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 와 $x^2 + y^2 = 5$ 이 직선 $y = ax + b$ $\cdots$① 에 대하여 대칭이므로
직선 ①은 점 $(-2, 1)$ 와 점 $(0, 0)$을 수직이등분한다.
따라서 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1이다.
$\frac{1}{2} = -a + b$, $\frac{1}{-2} \times a = -1$
$\therefore\ a = 2, b = \frac{5}{2}$
따라서 $a \times b = 2 \times \frac{5}{2} = 5$