

1. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0$ 이 점 $(-3, 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0$$

이 점 $(-3, 4)$ 를 지나므로

$$9 + 16 + 6 - 16a + b = 0$$

$$\therefore 16a - b = 31 \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0 \text{ 은}$$

$$(x-1)^2 + (y-2a)^2 = 4a^2 - b + 1 \text{ 이고}$$

원이 x 축에 접하므로

$$2a = \sqrt{4a^2 - b + 1}, \quad 4a^2 = 4a^2 - b + 1$$

$$\therefore b = 1 \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $16a - 1 = 31$

$$\therefore a = 2 \qquad \therefore a + b = 2 + 1 = 3$$

2. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

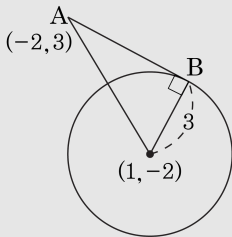
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



3. 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서 원에 그은 접선의 x 절편은?

- ① -10 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -1 ④ 10 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

점 $(1, -3)$ 에서 그은 접선의 방정식은

$$1x - 3y = 10$$

x 절편은 $y = 0$ 일 때의 x 좌표이므로 $x = 10$

4. 두 점 A(-1, 1), B(2, 1)로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 에 대하여 $\angle PAB$ 가 최대일 때 선분 AP 의 길이는?

① $\sqrt{10}$

② $2\sqrt{3}$

③ $\sqrt{13}$

④ $3\sqrt{2}$

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

점 P 의 좌표를 (x, y) 로 놓으면

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4\{(x-2)^2 + (y-1)^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

따라서 점 P 는 중심이 (3, 1) 이고

반지름의 길이가 2 인 원 위를 움직이므로

$\angle PAB$ 가 최대가 되는 것은

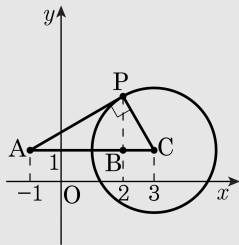
그림과 같이 직선 AP 가 원에 접할 때이다.

원의 중심을 C 라 하면

$\triangle PAC$ 에서

$\angle APC = 90^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$



5. 점 $P(x, y)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $Q(x + y, x - y)$ 의 자취는 원을 나타낸다. 이 원의 넓이는?

① π

② 2π

③ 3π

④ 4π

⑤ 5π

해설

$X = x + y$, $Y = x - y$ 로 놓고, x, y 에 관하여 연립하여 풀면

$$x = \frac{1}{2}(X + Y),$$

$$y = \frac{1}{2}(X - Y)$$

이것을 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$X^2 + Y^2 = (\sqrt{2})^2$$

따라서 구하는 넓이는 $\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi$

6. 두 원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, $x^2 + y^2 = r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을

$$C_1 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9 \leftarrow \text{중심 } (3, 4)$$

$$C_2 : x^2 + y^2 = r^2 (r > 0) \leftarrow \text{중심 } (0, 0)$$

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이다.

이 때, $|r - 3| = 5$ 이어야 하므로 $r - 3 = \pm 5$

$$\therefore r = 8 (\because r > 0)$$

7. 두 점에서 만나는 두 원

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

과 x, y 에 대한 방정식

$$(x^2 + y^2 - 2y - 3) + k(x^2 + y^2 - 4x + 1) = 0 (\text{단, } k \text{는 실수}) \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

에 대하여 방정식 ㉢의 그래프는 실수 k 의 값에 관계없이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지남을 보이는 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

두 원 ㉠, ㉡의 교점을 (α, β) 라고 하면

(가), (나) ($\leftarrow$ 두 원은 모두 점 (α, β) 를 지나므로) 이므로 임의의 실수 k 에 대하여

(다) ($\leftarrow (\alpha, \beta)$ 를 ㉢에 대입한 것과 같은 식)이 성립한다.

따라서, (라)의 그래프는 k 의 값에 관계없이 (마),

즉, 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지난다.

① (가) : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta - 3 = 0$

② (나) : $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 1 = 0$

③ (다) : $(\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta - 3) + (\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 1) = 0$

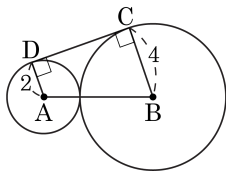
④ (라) : ㉢

⑤ (마) : 점 (α, β)

해설

(α, β) 를 ㉢에 대입한 식은 $(\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta - 3) + k(\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 1) = 0$

8. 다음 그림과 같이 서로 외접하는 두 원 A와 B의 반지름의 길이는 각각 2와 4이다. 두 원과 공통외접선의 교점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하면?



- ① $8\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{2}$
 ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

해설

피타고라스의 정리에 의하여 변 CD의 길이는

$$\sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{(2+4)4\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

9. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

④ $m \leq -2\sqrt{2}, m \geq 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2}, m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

$$\Rightarrow \text{중심} : (0, 0) \quad \text{직선} : x + y - k = 0$$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow k = \pm 2$$

$$\therefore k = -2 \quad (\because k < 0)$$

11. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

12. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, | -3m - 1 | = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

13. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을

표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로

중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.

원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는

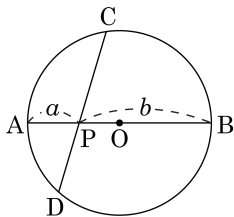
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에

이르는 거리의 최솟값은

$$d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

14. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{PC}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a , b 를 써서 나타내면?



① $\frac{a+b}{2}$

② $a+b$

③ $\sqrt{ab}$

④ ab

⑤ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

$$\overline{CP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ 이고}$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP} \text{ 이므로}$$

$$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{DP}$$

$$\therefore \overline{DP} = \frac{2ab}{a+b}$$

15. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점 $(1, 2)$ 는 점 $(-1, 3)$ 으로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f 에 의하여 원 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 이 옮겨진 원의 중심의 좌표는?

① $(1, -2)$

② $(-3, 2)$

③ $(2, -1)$

④ $(-1, 2)$

⑤ $(2, -3)$

해설

평행이동 f 는 x 축의 방향으로 -2 ,

y 축의 방향으로 $+1$ 만큼

평행이동 하는 변환이다.

$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ 의 중심은

$(-1, 1)$ 이므로 평행이동 f 에 의하여

$(-1 - 2, 1 + 1) = (-3, 2)$ 로 이동한다.

16. 원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi + 2$

② $2\pi + 4$

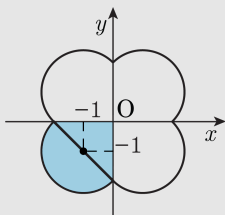
③ $2\pi + 8$

④ $4\pi + 8$

⑤ $8\pi + 8$

해설

원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \pi \times \sqrt{2}^2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \pi + 2$

따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로
 $4(\pi + 2) = 4\pi + 8$

17. 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$

② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$

③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$

④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x - a)^2 + (y + 2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3 - a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1 + 2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

18. 점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $P(a, b)$, $Q(a, 0)$, $O(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로

$a > 0, b > 0$ 이라 하면

$\triangle POQ$ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$

P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$

산술기하조건을 이용하면,

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$$

$$ab \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{넓이의 최댓값} : \frac{1}{4}$$

19. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$ 인 원을 x 축 방향으로 a 만큼 y 축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a^2 + b^2 = 4$

② $a^2 + b^2 = 9$

③ $a^2 + b^2 = 16$

④ $a^2 + b^2 = 25$

⑤ $a^2 + b^2 = 36$

해설

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9 \cdots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,

y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$\{(x-a)+3\}^2 + \{(y-b)-2\}^2 = 9$$

$$\{x-(a-3)\}^2 + \{y-(b+2)\}^2 = 9 \cdots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d 와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

$$\therefore d = \sqrt{(a-3+3)^2 + (b+2-2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + 3 = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 36$$

20. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.

따라서 다른 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 와 $x^2 + y^2 = 5$ 이 직선 $y = ax + b$... ①에 대하여 대칭이므로

직선 ①은 점 $(-2, 1)$ 와 점 $(0, 0)$ 을 수직이등분한다.

따라서 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1 이다.

$$\frac{1}{2} = -a + b, \quad \frac{1}{-2} \times a = -1$$

$$\therefore a = 2, b = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$