

1. 다항식 $8x^3 - 1$ 을 $4x^2 + 2x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때 $Q(x)$ 의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$\therefore Q(x) = 2x - 1$$

$$\therefore \text{상수항은 } -1$$

2. $x^2 + y^2 + 2xy - x - y$ 을 인수분해 하면?

① $(x - y)(x + y + 1)$

② $(x + y)(x - y - 1)$

③ $(x - y)(x - y - 1)$

④ $(x + y)(x + y - 1)$

⑤ $(x + y)(x + y + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 2xy - x - y \\ &= (x + y)^2 - (x + y) = (x + y)(x + y - 1) \end{aligned}$$

3. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned} &x = 21 \text{ 이라 하면} \\ &\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1} \\ &= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3) + 1} \\ &= \sqrt{\color{red}{x}(x+3))(x+1)(x+2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1} \\ &= \sqrt{\color{red}{[(x^2 + 3x) + 1]^2}} \\ &= x^2 + 3x + 1 \quad (\because (x^2 + 3x) + 1 > 0) \\ &= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505 \\ &\text{각자리 숫자의 합은 } 5 + 0 + 5 = 10 \end{aligned}$$

4. $16x^4 - 625y^4$ 을 옳게 인수분해한 것은?

① $(x + 5y)(2x - 5y)(4x^2 + 25y^2)$

② $(2x + y)(2x - 5y)(4x^2 + 25y^2)$

③ $(2x + 5y)(2x - 5y)(4x^2 + 25y^2)$

④ $(x + 5y)(x - 5y)(4x^2 + 25y^2)$

⑤ $(2x + 5y)(x - y)(4x^2 + 25y^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (4x^2)^2 - (25y^2)^2 \\ &= (4x^2 + 25y^2)(4x^2 - 25y^2) \\ &= (2x + 5y)(2x - 5y)(4x^2 + 25y^2)\end{aligned}$$

5. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

- ㉠

$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$
- ㉡

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$
- ㉢

$(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1) = x^4 + x + 1$
- ㉣

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$
- ㉤

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

㉢ $x + 1 = A$ 로 치환하여 전개하면
 $(x^2 + A)(x^2 - A) = x^4 - A^2 = x^4 - x^2 - 2x - 1$

6. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① 2

② $2(a+b)^n$

③ 4

④ $4(a+b)^n$

⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로

합차공식을 사용하여 정리하면

(준식) $= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2 - b^2)^n = 4$

7. $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$ 을 인수분해하면?

- ① $-(x-y)(y-z)(z-x)$ ② $-(x+y)(y-z)(z-x)$
③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$ ④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$
⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= xy(x-y) + zx(z-x) + yz(y-z) \\&= yx^2 - y^2x + z^2x - zx^2 + yz(y-z) \\&= (y-z)x^2 - (y^2 - z^2)x + yz(y-z) \\&= (y-z)x^2 - (y+z)(y-z)x + yz(y-z) \\&= (y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\} \\&= (y-z)(x-y)(x-z) \\&= -(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$

8. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{단, } a \neq b \neq c)$$

- ① -1
- ② 1
- ③ $-\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{1}{2}$
- ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 \end{aligned}$$

9. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + a)(x + b)(x + c)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$
 $\therefore a + b + c = 4$

10. $a + b + c = 0$ 일 때, $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$a + b + c = 0$ 이면 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이다.

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} \\ &= \frac{a^2(-a) + b^2(-b) + c^2(-c)}{abc} \\ &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\ &= \frac{-3abc}{abc} = -3 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} &a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} + \frac{b+c}{a} \\ &= \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} \quad (\because a+b+c=0) \\ &= -3 \end{aligned}$$

11. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$ 을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① $\angle B = 120^\circ$ 인 둔각삼각형 ② 직각삼각형
③ $\angle B = 150^\circ$ 인 둔각삼각형 ④ 이등변삼각형
⑤ $\angle A = 35^\circ$ 인 예각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b \\ &= a^2(b-c) + a(c+b)(c-b) + bc(b-c) \\ &= (b-c) \{a^2 + (c+b)a + bc\} \\ &= (b-c)(a+b)(a+c) \\ &\therefore b = c \quad (\because a+b \neq 0, a+c \neq 0) \end{aligned}$$

12. $x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$ 을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4 + 324)(23^4 + 324)(35^4 + 324)(47^4 + 324)}{(5^4 + 324)(17^4 + 324)(29^4 + 324)(41^4 + 324)}$$

- ① 192 ② 193 ③ 194 ④ 195 ⑤ 196

해설

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) \\ &= \{(x - y)^2 + y^2\}\{(x + y)^2 + y^2\} \text{ 이고,} \\ 324 &= 4 \times 3^4 \text{ 이므로} \\ 11^4 + 324 &= (11^2 - 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2)(11^2 + 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2) \\ &= \{(11 - 3)^2 + 3^2\}\{(11 + 3)^2 + 3^2\} \\ &= (8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2) \end{aligned}$$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\begin{aligned} &\frac{\{(8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2)\}\{(20^2 + 3^2)(26^2 + 3^2)\}}{\{(2^2 + 3^2)(8^2 + 3^2)\}\{(14^2 + 3^2)(20^2 + 3^2)\}} \\ &\frac{\{(32^2 + 3^2)(38^2 + 3^2)\}\{(44^2 + 3^2)(50^2 + 3^2)\}}{\{(26^2 + 3^2)(32^2 + 3^2)\}\{(38^2 + 3^2)(44^2 + 3^2)\}} \\ &= \frac{50^2 + 3^2}{2^2 + 3^2} = \frac{2509}{13} = 193 \end{aligned}$$

13. $a - b = 2 - \sqrt{3}$, $b - c = 2 + \sqrt{3}$ 인 세 수 a , b , c 에 대하여 $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ 의 값은?

- ① 4 ② 3 ③ 1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} a - b &= 2 - \sqrt{3} \dots\dots\textcircled{A} \\ b - c &= 2 + \sqrt{3} \dots\dots\textcircled{B} \\ \textcircled{A} + \textcircled{B} \text{을 계산하면 } a - c &= 4 \\ a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) \\ &= a^2(b - c) + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b \\ &= a^2(b - c) - a(b^2 - c^2) + b^2c - c^2b \\ &= a^2(b - c) - a(b + c)(b - c) + bc(b - c) \\ &= (b - c)(a^2 - a(b + c) + bc) \\ &= (b - c)(a - b)(a - c) \\ &= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \cdot 4 = 4 \end{aligned}$$

14. $a + b + c = 0$ 일 때, 다음 중 $2a^2 + bc$ 와 같은 것은?

① $(a - c)^2$

② $(b + c)^2$

③ $(a + b)(b + c)$

④ $(a - b)(a - c)$

⑤ $(a - b)(a + c)$

해설

$$\begin{aligned} 2a^2 + bc &= 2a^2 - b(a + b) \quad (\because c = -a - b) \\ &= 2a^2 - ab - b^2 \\ &= (a - b)(2a + b) \\ &= (a - b)(a + b + a) \\ &= (a - b)(a - c) \quad (\because a + b = -c) \end{aligned}$$

15. 두 다항식 $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$, $3x^3 - 3x^2 - 6x$ 의 최대공약수를 구하면?

- ① $(x-1)(x-2)$ ② $(x+1)(x+2)$ ③ $(x+1)(x-2)$
④ $(x-1)(x-2)$ ⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$$\begin{aligned} & 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4 \\ &= (x+1)(x-2)(x+1)(3x-2) \\ & 3x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x-2)(x+1) \\ & \therefore \text{최대공약수} : (x-2)(x+1) \end{aligned}$$

16. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

- ① $(x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$ ② $(x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$
③ $(x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$ ④ $(x - 1)(x + 4)^2(x + 2)$
⑤ $(x - 1)(x + 4)(x + 2)^2$

해설

인수정리에 의해

$$f(1) = 1 - a + b = 0$$

$$g(1) = 1 + a - 2b = 0$$

연립하면, $a = 3, b = 2$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$$

조립제법을 이용하면,

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$\therefore \text{최소공배수: } (x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$$

17. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
 $\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2$, $\alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면
 $-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$

18. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+2$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4 이다. $A+B=ax^2+bx+c$ 를 만족하는 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$
두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$
 $A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$
 $=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$
 $\therefore a=2, b=3, c=-2$
 $\therefore a+b+c=3$

19. 최대공약수가 $x+1$ 이고, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2 일 때, 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 합을 구하면?

- ㉠ $2x^2+3x+1$ ㉡ x^2+3x+1 ㉢ $2x^2+3x+2$
㉣ x^3+3x-2 ㉤ x^2-x+1

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x-1)(x+2)$
 $\therefore$ 두 다항식은 $(x+1)(x-1), (x+1)(x+2)$ 이다.
 $\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2+3x+1$

20. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x + 2$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 2x$ 일 때, 두 이차식의 합은?

- ① $2x^2 + 3x + 2$
- ② $2x^2 - 3x - 2$
- ③ $x^2 - 3x - 2$
- ④ $2x^2 + 3x - 2$
- ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = Ga, B = Gb$ (a, b 는 서로소)
 $G = x + 2$
 $L = x^3 + x^2 + 2x = x(x + 2)(x - 1) = Gab$
 $A = x(x + 2) = x^2 + 2x$
 $B = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$
 $A + B = 2x^2 + 3x - 2$

21. 최고차항의 계수가 1인 두 다항식의 곱이 $x^3 - x^2 - 8x + 12$ 이고, 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, 두 다항식의 합을 구하면?

- ① $x^2 + 2x + 6$ ② $x^2 + 2x - 8$ ③ $x^2 + 4x - 8$
④ $x^2 + 4x + 8$ ⑤ $x^2 + 4x - 5$

해설

최대공약수가 $x - 2$ 이므로
구하는 두 다항식을 $a(x - 2)$, $b(x - 2)$ (단, a , b 는 서로 소인 다항식)로 놓을 수 있다.
그런데, 두 다항식의 곱이 $x^3 - x^2 - 8x + 12$ 이므로
 $a(x - 2)b(x - 2) = x^3 - x^2 - 8x + 12$
 $\therefore ab(x - 2)^2 = (x - 2)^2(x + 3)$
 $\therefore ab = x + 3$
 $\therefore a = 1, b = x + 3$ 또는 $a = x + 3, b = 1$
따라서 두 다항식은 $x - 2$, $(x - 2)(x + 3)$ 이다.
 $\therefore x - 2 + x^2 + x - 6 = x^2 + 2x - 8$

22. 최고차항의 계수가 1인 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 곱이 $x^3 + x^2 - 5x + 3$ 이고, 최소공배수가 $x^2 + 2x - 3$ 일 때, $f(2) + g(2)$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$f(x)g(x) = (x-1)^2(x+3)$,
 $L = (x-1)(x+3)$ 이므로
 $f(x) = (x-1), g(x) = (x-1)(x+3)$
(또는 그 반대일 수 있으나 문제 의도상 상관없음)
 $\therefore f(2) + g(2) = 1 + 5 = 6$

23. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-6x 일 때, 두 이차식의 합은?

① $(x+1)(x-2)$

② $(x+2)(x+4)$

③ $2(x-1)(x+3)$

④ $2(x-2)(x-4)$

⑤ $2(x+1)(x-4)$

해설

최대공약수가 $x+3$ 이므로 두 이차식을 $a(x+3)$, $b(x+3)$ (a, b 는 서로소)라 하고
최소공배수를 $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ 라 하면
 $f(x) = x(x^2 + x - 6) = x(x+3)(x-2)$
따라서 두 다항식은
 $x(x+3)$, $(x-2)(x+3)$ 이므로
구하는 두 다항식의 합은
 $x(x+3) + (x-2)(x+3) = (x+3)(2x-2)$
 $= 2(x-1)(x+3)$

24. 두 다항식 $x^2 + px + q$ 와 $x^2 + qx + p$ 의 최대공약수가 $x - a$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $p = q$

② $p + q = 1$

③ $p = q + 1$

④ $pq = 1$

⑤ $p + q = -1$

해설

나머지 정리에 의해 $x = a$ 를 대입하면 $a^2 + pa + q = 0$, $a^2 + qa + p = 0$ 이다.

두식을 빼면, $(p - q)a - (p - q) = 0$, $(p - q)(a - 1) = 0 \Leftrightarrow p = q$ 또는 $a = 1$

$p = q$ 이면 최대공약수가 $x^2 + px + q$ 가 되므로, 조건에 맞지 않는다

$\therefore a = 1$ 에서 $p + q = -1$

25. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A * B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 할 때, $(A^2 * B^2) \star (A^2 * AB)$ 와 같은 것은?

- ① AG ② A ③ AL ④ AB ⑤ I

해설

$$\begin{aligned} A &= Ga, \quad B = Gb(a, b \text{는 서로소}) \text{로 놓으면} \\ (A^2 * B^2) \star (A^2 * AB) \\ &= (G^2 a^2 * G^2 b^2) \star (G^2 a^2 * G^2 ab) \\ &= G^2 \star G^2 a \\ &= G^2 a \\ &= AG \end{aligned}$$