

1. 부등식 $|2x - a| > 7$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > b$ 일 때, 상수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x - a| > 7$ 에서

$2x - a < -7$ 또는 $2x - a > 7$

$\therefore x < \frac{a-7}{2}$ 또는 $x > \frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x < -1$ 또는 $x > b$ 이므로

$\frac{a-7}{2} = -1, \frac{a+7}{2} = b$

$\therefore a = 5, b = 6$

$\therefore a + b = 11$

2. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ 의 해를 구하면?

① 해가 없다

② $x = 3$

③ $x \neq 3$ 인 모든 실수

④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x - 3)^2 \geq 0$, (실수) $^2 \geq 0$ 이므로
∴ ⑤ 모든 실수

3. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ 의 해를 구하면?

① $x \geq 3$ 또는 $x \leq -3$

② x 는 모든 실수

③ $x \neq 3$ 인 모든 실수

④ $x = 3$

⑤ 해가 없다

해설

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

$$(x - 3)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x = 3$$

4. 부등식 $|x - 2| < k$ 를 만족하는 모든 x 의 값이 부등식 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 만족할 때, 실수 k 의 최댓값은? (단, $k > 0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 풀면
 $-8 \leq x^2 - 8 \leq 8$
 $0 \leq x^2 \leq 16$
 $\therefore -4 \leq x \leq 4$
 $k > 0$ 이므로 부등식 $|x - 2| < k$ 을 풀면
 $-k < x - 2 < k$
 $-k + 2 < x < k + 2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 만족하려면
 $-k + 2 \geq -4$, $k + 2 \leq 4$ 이어야 하므로
 $k \leq 6$, $k \leq 2$
 $\therefore 0 < k \leq 2$
따라서 실수 k 의 최댓값은 2이다.

6. 부등식 $(a - b)x + (b - 2a) > 0$ 의 해가 $x > \frac{3}{2}$ 일 때, 부등식 $ax^2 + (a + 2b)x + (a + 3b) < 0$ 의 해를 구하면?

- ① $3 < x < 7$ ② $-3 < x < 1$ ③ $x < 2, x > 3$
④ $-1 < x < 2$ ⑤ $x < -2, x > 4$

해설

$(a - b)x > 2a - b$ 의 해가 $x > \frac{3}{2}$ 이라면

$a - b > 0, \frac{2a - b}{a - b} = \frac{3}{2}$ 이어야 한다.

$\therefore a = -b, b < 0$

준 부등식 $-bx^2 + bx + 2b < 0$ 에서

$x^2 - x - 2 < 0, (x - 2)(x + 1) < 0$

$\therefore -1 < x < 2$

7. 임의의 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이 항상 성립할 조건은

$$D/4 = a^2 - 2a - 3 = (a + 1)(a - 3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

a 의 최솟값은 -1

8. 모든 실수 x 에 대해 이차부등식 $x^2 - x(kx - 3) + 3 > 0$ 이 항상 성립하기 위한 정수 k 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$$(1 - k)x^2 + 3x + 3 > 0$$

$$D = 3^2 - 4 \times (1 - k) \times 3 < 0$$

$$\therefore k < \frac{3}{12} = 0.25$$

최대 정수 $k = 0$

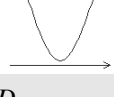
9. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(k-2)x^2 + 2(k-2)x + 1 > 0$ 이 성립할 때, 실수 k 값의 범위가 $m \leq k < n$ 이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m+n=5$

해설

① $k=2$ 일 때 $1 > 0$ $\therefore$ 성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2) > 0, k > 2$

③ $\frac{D}{4} < 0$ 에서 $(k-2)^2 - (k-2) < 0$

$(k-2)(k-3) < 0, 2 < k < 3$

①을 만족하거나 ②와 ③을 동시에 만족해야 하므로 $2 \leq k < 3$
 $\therefore m=2, n=3, m+n=5$

10. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x - 3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 10$

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 로 놓으면

$f(4x - 3) = a(4x - 3 - \alpha)(4x - 3 - \beta) = 0$

$x = \frac{3 + \alpha}{4}, \frac{3 + \beta}{4}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{6 + \alpha + \beta}{4} = 4$

11. 다음은, 둘레의 길이가 28 cm 이고 넓이가 45 cm² 이상인 직사각형에서 가로 길이의 범위를 구하는 문제의 풀이 과정이다.

가로의 길이를 x cm 라고 하면, 세로의 길이는 (가) cm 이다.
이때, x 의 값의 범위는 (나) 이다.
또 직사각형의 넓이는 (가로)(세로)= $x(\text{가})$ 이다.
이것이 45 cm² 이상이 되어야 하므로 $x \times (\text{가}) \geq (\text{다})$
이식을 정리하면 $(\text{라}) \leq 0$
 (라) 를 인수분해하면 (마) 이다.
따라서 가로의 길이를 5 cm 이상, 9 cm 이하로 하면 문제의 뜻에 맞는다.

다

음 중 $(\text{가}), (\text{나}), (\text{다}), (\text{라}), (\text{마})$ 에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

- ① $(\text{가}) \ 14 - x$
- ② $(\text{나}) \ 0 < x < 14$
- ③ $(\text{다}) \ 45$
- ④ $(\text{라}) \ 14x - x^2 - 45$
- ⑤ $(\text{마}) \ (x - 5)(x - 9)$

해설

(사각형의 둘레의 길이)
= 2(가로의 길이 + 세로의 길이)
 $28 = 2x + 2 \cdot (\text{가}), 14 = x + (\text{가})$
 $\therefore (\text{가}) = 14 - x$
가로의 길이의 범위 : $x > 0, 14 - x > 0 \rightarrow x < 14$
 $\therefore 0 < x < 14 \cdots (\text{나})$
직사각형의 넓이 : $x(14 - x) \geq 45$
 $\therefore (\text{다}) = 45$
 $(\text{라}) = x^2 - 14x + 45 \leq 0$
 $(\text{마}) = (x - 5)(x - 9) \leq 0$

12. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

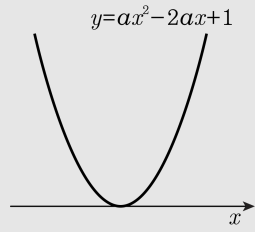
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면

$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$

(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0 \text{ 에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 $a = 1$

13. 세 변의 길이가 $x-1$, x , $x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x 의 값의 범위가 $a < x < b$ 라 할 때, 방정식 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1$, x , $x+1$ 은 삼각형의 세 변이므로
 $x-1 > 0$, $x > 0$, $x+1 > 0$, $x-1+x > x+1 \therefore x > 2 \dots\dots ㉠$
한편, 둔각삼각형이 되려면
 $(x-1)^2 + x^2 < (x+1)^2$
 $x^2 - 4x < 0$ 에서 $0 < x < 4 \dots\dots ㉡$
㉠, ㉡에서 $2 < x < 4$
 $\therefore a = 2$, $b = 4$
따라서 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은
 $\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$

14. 다음 부등식 ㉠과 부등식 ㉡의 해가 일치할 때, a, b 의 값을 구하면?

$$x^2 - 2x - 3 < 3|x - 1| \cdots \textcircled{㉠}$$
$$ax^2 + 2x + b > 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

- ① $a = -1, b = 15$

② $a = -2, b = 14$
- ③ $a = -3, b = 13$

④ $a = -4, b = 12$
- ⑤ $a = -5, b = 10$

해설

㉠ 부등식에서 $x \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$
 $\therefore x^2 - 5x < 0$ 이므로 $0 < x < 5$
 $\therefore 1 \leq x < 5 \cdots \textcircled{㉢}$
 $x < 1$ 일 때 $x^2 - 2x - 3 < -3x + 3$
 $x^2 + x - 6 < 0$ 이므로 $(x - 2)(x + 3) < 0$
 $\therefore -3 < x < 2$ 따라서 $-3 < x < 1 \cdots \textcircled{㉣}$
㉢, ㉣에 의하여 $-3 < x < 5$
 $\therefore a(x + 3)(x - 5) < 0$
 $\therefore a(x^2 - 2x - 15) < 0$
 $ax^2 + 2x + b > 0$ 와 일치해야 하므로
 $a = -1, b = 15$

15. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 a, b 의 조건으로 바른 것은?

① $a \neq 20, b < 25$

② $a = 20, 0 < b < 25$

③ $a = 20, b > 25$

④ $0 < a < 20, b > 25$

⑤ $0 < a \leq 20, 0 \leq b \leq 25$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리한다

$$\Rightarrow x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0$$

항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다

$$D' = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$\Rightarrow (20 - a)y + 25 - b < 0$$

임의의 x, y 에 대해 성립하려면, $a = 20, b > 25$

16. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$

② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ ($\alpha < 0 < \beta$) 이므로

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta), \quad a > 0$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore c < 0$$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c \left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} \right) \\ &= c \left(x^2 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta} \right) \\ &= c \left\{ x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)x + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \right\} \\ &= c \left(x - \frac{1}{\alpha} \right) \left(x - \frac{1}{\beta} \right) < 0 \end{aligned}$$

$$c < 0 \text{ 이고 } \frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta} \text{ 이므로 구하는 해는 } x < \frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } x > \frac{1}{\beta}$$

17. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x - 2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 0
- ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx + 1) > -(x - 2)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
 $\textcircled{1}$ 식을 정리하면
 $x^2 + 2(k - 2)x + 5 > 0$
 $\textcircled{1}$ 식이 항상 성립하기 위하여
 $\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - 5 < 0$
 $\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
 $\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3은 k 의 값의 범위에 속하나
-1은 속하지 않는다.

18. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \leq x^2 \leq 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275 ② 310 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

해설

$$x+a \leq x^2 \leq 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x \geq a \\ x^2-2x \leq b \end{cases}$$

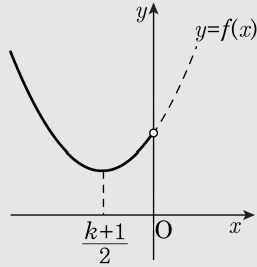
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

즉, $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x \leq 2$ 이므로 $a \leq -\frac{1}{4}$



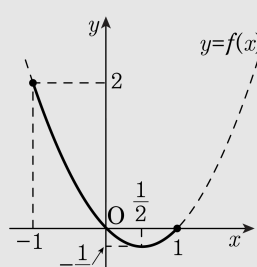
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$$g(x) = (x-1)^2 - 1$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \leq g(x) \leq 3$

즉, $-1 \leq x^2 - 2x \leq 3$ 이므로 $b \geq 3$



(i), (ii) 에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$$

$\therefore 100p = 325$

19. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

- ① $-2 \leq x < 3$ ② $-2 < x < 3$ ③ $2 \leq x < 3$
④ $2 < x \leq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \geq 0$ 에서
 $x^2(x-2) + (x-2) \geq 0$
 $\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$
 $x^2+1 > 0$ 이므로 $x-2 \geq 0$
 $\therefore x \geq 2 \cdots (가)$
 $x^2 - x - 6 < 0$ 에서 $(x-3)(x+2) < 0$
 $\therefore -2 < x < 3 \cdots (나)$
따라서 (가), (나)의 공통 범위를 구하면
 $2 \leq x < 3$ 이다.

20. 이차부등식 $x^2 - 2x - 3 > 3|x - 1|$ 의 해가 이차부등식 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해와 같을 때, 실수 a, c 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > 3x - 3, x^2 - 5x > 0$
 $x(x - 5) > 0, x < 0$ 또는 $x > 5$
 $\therefore x > 5$
2) $x < 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > -3x + 3, x^2 + x - 6 > 0$
 $(x + 3)(x - 2) > 0, x < -3$ 또는 $x > 2$
 $\therefore x < -3$
1), 2)에서 $x < -3$ 또는 $x > 5$
한편 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해가
 $x < -3$ 또는 $x > 5$ 이므로
 $a < 0$ 이고, $ax^2 + 2x + c = a(x + 3)(x - 5)$ 이다.
 $ax^2 + 2x + c = ax^2 - 2ax - 15a$ 에서
 $a = -1, c = 15 \quad \therefore a + c = 14$

21. $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$ (단, n 은 정수)인 실수 x 에 대하여 $\{x\} = n$ 으로 나타낼 때, 방정식 $\left\{x^2 - x - \frac{1}{2}\right\} = 3x + 1$ 의 근을 α, β 라 하자. 이 때, $9\alpha\beta$ 의 값을 구하면?

① 13 ② -13 ③ 15 ④ -15 ⑤ 17

해설

$3x + 1$ 은 정수이므로

$$(3x + 1) - \frac{1}{2} \leq x^2 - x - \frac{1}{2} < (3x + 1) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore 5 \leq x^2 - 4x + 4 < 6$$

$$\therefore 5 \leq (x - 2)^2 < 6$$

이때, $3x + 1$ 이 정수이므로 $3x$ 도 정수,

$$3x = k(k \text{는 정수}) \text{라 하면 } x = \frac{k}{3}$$

$$\therefore 5 \leq \left(\frac{k-6}{3}\right)^2 < 6$$

$$\therefore 45 \leq (k-6)^2 < 54 \quad \therefore k = -1, 13$$

$$k = -1 \text{ 일 때 } x = -\frac{1}{3},$$

$$k = 13 \text{ 일 때 } x = \frac{13}{3}$$

$$\therefore 9\alpha\beta = -13$$